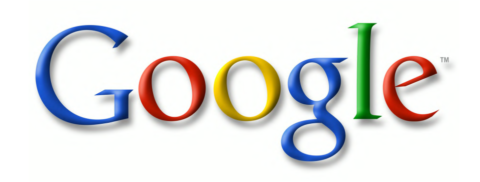



SIGILLVM ACADEMIÆ HARVARDIANÆ IN NOV: ANG:
CHRISTO ET ECCLESIÆ



EXERCICES ET PROBLÈMES

D'ALGÈBRE

RECUEIL GRADUÉ

PAR

S. TZAUT

PROFESSEUR A L'ÉCOLE INDUSTRIELLE CANTONALE ET AU COLLÈGE GALLIARD A LAUSANNE,
ANCIEN AUDITEUR EXTERNE A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE PARIS

In scientiis addiscendis, exempla magis prosunt quam præcepta. NEWTON.

Des radicaux et des équations du second degré au binome et aux déterminants.

EXERCICES



PARIS
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER
Quai des Augustins, 55.

1881

Le Département de l'Instruction publique et des Cultes du canton de Vaud autorise l'emploi du présent ouvrage dans les collèges et les écoles industrielles du canton.

Lausanne, le 17 mai 1880.

Le Chef du Département,

BOICEAU.



EXERCICES ET PROBLÈMES d'ALGÈBRE, recueil gradué, par C. Morf et S. Tzaut, première série, ouvrage recommandé par les Départements de l'Instruction publique des cantons de Vaud et de Fribourg; 1 vol. in-12 Fr. 3

RÉPONSES aux Exercices de la première série, 1 vol. in-12 . . . . Fr. 2

EXERCICES ET PROBLÈMES D'ALGÈBRE, recueil gradué, par S. Tzaut. Des radicaux et des équations du second degré au binome et aux déterminants, 1 vol. in-12, fr. 3 50

RÉPONSES (*sous presse pour paraître prochainement.*)



LAUSANNE. — IMPRIMERIE ED. JAUNIN

PRÉFACE

Ce second volume d'*Exercices et Problèmes d'algèbre* est rédigé sur le même plan que la première série, qui a paru il y a trois ans. Il renferme plus de 6200 exercices sur tous les sujets qui rentrent dans le domaine de l'algèbre élémentaire, depuis les équations du premier degré, exclusivement, jusqu'au Binome de Newton.

Les opérations à exécuter sur les radicaux embarrassent souvent les élèves, et cependant il importe que ceux-ci se familiarisent avec le calcul de ces quantités, s'ils ne veulent être arrêtés à chaque instant. De très nombreux exercices gradués leur fourniront le moyen de se rendre maîtres de cette difficulté.

J'ai pensé qu'il serait utile aussi de montrer comment les quantités imaginaires peuvent être représentées géométriquement au moyen d'une convention très simple. Ces notions élémentaires formeront une première base pour l'étude ultérieure des quantités complexes.

Les équations du second degré et celles qui s'y ramènent forment naturellement un des chapitres les plus importants de ce volume (1100 exerc.). On y trouvera des exemples qui offrent déjà une certaine difficulté. J'ai donné aussi à d'autres chapitres un peu plus de développement qu'on ne le fait dans la plupart des traités; il m'a semblé que ces sujets fournissaient des exemples particulièrement propres à développer la perspicacité de l'élève et à le familiariser avec des artifices de calcul qui le sortent des chemins battus.

Enfin, j'ai consacré aux déterminants une place relativement considérable. Cette branche de l'algèbre, née pour ainsi dire d'hier, prend chaque jour une importance croissante, et on ne peut plus l'omettre dans un recueil comme celui-ci. Cette théorie ne

sort du reste nullement du cadre de l'algèbre élémentaire ; mais comme elle n'est pas encore généralement enseignée dans les établissements secondaires, j'espère être utile aux élèves en rappelant les théorèmes relatifs aux propriétés des déterminants ; je renvoie pour la démonstration de ces propositions aux ouvrages théoriques, tels que ceux de *P. Mansion*, *Dostor*, *H. Laurent*, *Baltzer*, *Todhunter* (*Theory of Equations*), etc.

Ce volume devait paraître beaucoup plus tôt ; mais à peine l'impression de la première série était-elle terminée que mon ami et collaborateur, M. C. Morf, était envelé subitement à l'affection des siens. Resté seul pour préparer ce second volume, auquel je ne pouvais consacrer que le temps restreint que me laissent les devoirs de l'enseignement, j'ai dû forcément en retarder la publication. Je ne saurais y mettre la dernière main sans rendre un hommage au savant modeste, à l'homme droit, généreux et dévoué dont la mort prématurée a fait un si grand vide dans le corps enseignant de notre pays.

Lausanne, le 29 avril 1880. **S. TZAUT.**

TABLE DES MATIÈRES

ERRATA

Pages

24 Ex. 22, au lieu de $4y^{\frac{3}{2}}$ lisez $4x^{\frac{3}{2}}$.

26 » 29, » $\frac{n}{p}$ » $\frac{n}{q}$.

28 » 104, » $+ ab^{\frac{3}{5}}$, lisez $+ ab^{\frac{8}{5}}$.

34 » 55, mettre au second signe radical l'indice 3.

38 » 40, sous le premier radical, mettre les trois premières quantités entre parenthèses, et corriger le second radical ainsi :

$$\sqrt[3]{\left\{x - a^4 + a\left(1 - 3x\right) - 3a^2\left(1 - x\right) + a^3\left(3 - x\right)\right\}\left(x + a\right)}.$$

38 Ex. 42, 1er radical, lire $\sqrt{3(x + a) - \frac{x^2 + a^2}{x - a}}$.

38 » 49, au lieu de $\sqrt[8]{614656}$, lire $\sqrt[8]{19,4481}$.

47 » 63, » $-\sqrt{\frac{135m^3n^6y}{8}}$ lire $-\sqrt[3]{\frac{135m^3n^6y}{8}}$.

66 » dernière formule, au lieu de

$-\sqrt{\frac{b}{a}} \times \sqrt{-1}$, lire $-\sqrt{\frac{a}{b}} \times \sqrt{-1}$.

77 » 60, remplacer le terme $-28x^3y^7$ par $-52x^3y^7$.

78 » 76, dernier terme, au lieu de

$-\frac{64u^{-\frac{3}{5}}z^{\frac{2}{5}}}{45}$, lire $-\frac{64u^{-\frac{3}{5}}z^{\frac{2}{3}}}{45}$

82 » 36, second terme, au lieu de $+12x^2y$, lire $+12x^2z$.

121 » 162 sous le radical, au lieu de x, lire partout x^2.

130 6e ligne, au lieu de $ax^2 + bx + a$, lire $ax^2 - bx + a$.

136 avant-dernière ligne, après *rectangulaire*, ajouter : et conservant le même périmètre.

198 probl. 17, ajoutez : L'intérêt est au 5 %.

200, la note se rattache au problème 2.

221 probl. 23, modifier l'énoncé ainsi : Si on les répartissait également entre 13 enfants, il en resterait 9, mais il resterait 4 poires si on les partageait entre 15 enfants.

234, probl. 20, au lieu de 1297, lire 38417.

248, probl. 45, lire cet ex. ainsi : $\Sigma \pm a_1^i \, a_2^k \, a_3^l$.

» » 46, » » » $\Sigma \pm x_{1a} \, x_{2b} \, x_{3c}$.

260. Ex. 10, seconde ligne de l'exemple, au lieu de a_3^3, lire a_2^3.

CHAPITRE PREMIER

PUISSANCES

I. PUISSANCES MARQUÉES PAR DES EXPOSANTS ENTIERS POSITIFS (1)

I

$$a^m . a^n = a^{m+n}.$$

$$(-a)^n = \begin{cases} -a^n \text{ quand } n \text{ est impair} \\ +a^n \quad » \quad n \quad » \text{ pair.} \end{cases}$$

Indiquer la règle de multiplication de puissances ayant la même base.

Comment calcule-t-on la valeur d'un nombre élevé à une puissance dont l'exposant est une somme? Connaissant $3^5 = 729$ et $3^4 = 81$, comment trouve-t-on 3^{5+4} ou 3^9 ?

Calculez la valeur des quantités suivantes :

1. $3^4 \times 3^2$. **2.** $5^2 \times 5^5$. **3.** 8×8^6. **4.** $9^2 \times 9^3$.
5. $10^3 \times 10^6$. **6.** $5^2 + 2^5$. **7.** $4^3 + 7^3$. **8.** $2^5 + 4^5$.
9. $8^2 + 2^8$. **10.** $2^7 - 7^2$. **11.** $2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3$.
12. $1^2 - 3^2 + 5^2 - 6^2 + 7^2$.
13. $2^4 - 4^4 + 6^4 - 8^4 + 10^4 - 12^4$. **14.** $(-4)^2$.
15. $(-6)^4$. **16.** $(+6)^4$. **17.** $(-5)^3$. **18.** $(+5)^3$.
19. -5^4. **20.** $(-1)^1$. **21.** $(-1)^2$. **22.** $(-1)^3$.
23. $(-1)^4$. **24.** $8^4 - (-5)^3$. **25.** $-7^4 + (-4)^5$.
26. $(-7)^4 - 4^5$. **27.** $(-4)^6 - (-2)^5$. **28.** $(+5)^3 - (+6)^3$.

(1) Voir, sur l'introduction des exposants dans la notation algébrique, le premier volume, page 6, note.

29. $-(-7)^3 + (-8)^5$. 30. $-(+5)^5 + (+1)^8$.
31. $-(-1)^9 - (-10)^7$. 32. $(-5)^3 + (-3)^5$.
33. $-(+8)^2 + (-2)^8$. 34. $(-7)^8 - (-3)^7$.
35. $5 \times 4^3 - 4 \times 5^3$. 36. $4 \times 5^2 + 5 \times 4^2$.
37. $8 \times 5^3 - 7^3$. 38. $9^5 - 7(-4)^3$.
39. $6 \times 5^2 - 15 \times 3^3$. 40. $5 \times 4^3 - 7 \times 3^4$.
41. $x^n.x$. 42. $m^{a-1}.m$. 43. $a^{x-2}.a^2$. 44. $b^{m-3}.b^2$.
45. $d^{a-5}.d^6$. 46. $y^{m-n}.y^n$. 47. $e^{x-y}e^y$. 48. $c.c^{a-2}.c$.
49. $a^{2m-n}.a^{m+n}$. 50. $b^{2m-3n}b^{4n-m}$. 51. $a^{3x-y}a^{2x-y}$. 52. $p^{3a-b}p^{7b-2a}$.
53. $(a+b)^n.(a+b)^m$. 54. $(x-y)^{m-1}(x-y)$.
55. $(p+q)^{a-b}(p+q)^b$. 56. $(a^x+b^y)(a^x-b^y)$.
57. $(a^m+b^n)^2$. 58. $(m^x-n^y)^2$.
59. $(m^6-n^x)(m^6+n^x)$. 60. $(p^{m-1}+q^{n-2})^2$.
61. $(z^{3m-2n}+u^n)^2$. 62. $(a^m+b^n)^3$.
63. $(x^a-y^b)^3$. 64. $(p^{r+s}+q^t)^3$.
65. $(2a^{m+3}-3b^{2n-1})^3$. 66. $(m^a+n^b+p^c)^2$.
67. $(2a^m-3b^{n+1}-4c^{2p})^2$. 68. $(x^{2n+1}-2y^{3m+2}+z^{m+n})^2$.
69. $(x^{3n}-x^{2n+m}+x^{n+2m}-x^{3m})(x^n+x^m)$.
70. $(p^{3a-6b}+p^{5a-8b}+p^{7a-10b}+p^{9a-12b})(p^{a-2b}-p^{3a-4b})$.
71. $(m^p+3m^{p-1}n^q-6m^{p-2}n^{2q})(m^qn^q-7m^{q-1}n^{2q})$.
72. $(a^{xy-1}-b^{xy-1})(a^y-b^x)$.
73. $(a^m-ba^{m-1}x+ca^{m-2}x^2)(a^m+ba^{m-1}x-ca^{m-2}x^2)$.
74. $\left(5a^{m-2}cx^{n+1}+a^mx^n-\frac{3a}{y}\right)\left(5a^{m-2}cx^{n+1}-a^mx^n+\frac{3a}{y}\right)$.
75. $\frac{a}{b^x}+\frac{a}{b^{x-1}}$. 76. [2] $\frac{b^{p-1}}{(b+c)^{q-1}}-\frac{b^p}{(b+c)^q}$.
77. $\frac{m^x}{(m-p)^x}-\frac{m^{x-1}}{(m-p)^{x-1}}$. 78. $\frac{x^c+y^c}{x^c-y^c}-\frac{x^c-y^c}{x^c+y^c}$.
79. $\frac{x}{m^{p-q}}+\frac{y}{m^{p-t}}+\frac{z}{m^{p-u}}-\frac{v}{m^p}$.
80. $\frac{x^{a+b+c}-x^{a-b+c}}{x^{a-b-c}-x^{a-b+c}}-\frac{x^{a+b-c}-x^{a-b+c}}{x^{a+b+c}+x^{a+b-c}}$.
81. $(-a)^3 \times (-a)^5$. 82. $(-x)^5 \times (-x)^4$.
83. $(-b) \times (-b)^7$. 84. $(-m)^{2p} \times (-m)$.

(1) Donnez à ces deux quotients le même diviseur et faites ensuite le réductions

85. $(-y)^{2n+1} \times (-y)^3$.
86. $(-d)^{2n-1} \times (-d)^5$.
87. $(-c)^{2m+1} \times (-c)^{2n-1}$.
88. $(-a)^{2m} \times (-a)^7$.
89. $(-h)^8 \times (+h)^5$.
90. $(-m)^7 \times (-m)^{2p}$.
91. $(-x)^{2m+1} \times (-x)^5$.
92. $(+ab)^4 \times (-ab)^5$.
93. $(-cd)^{2m} \times (-cd)^{2n-1}$.
94. $(-xy)^{2n-1} \times (-xy)^3$.
95. $\left(-\frac{x}{y}\right)^7 \times \left(-\frac{x}{y}\right)^8$.
96. $\left(-\frac{a}{b}\right)^3 \times \left(-\frac{a}{b}\right)^7$.
97. $\left(-\frac{m}{n}\right)^9 \times \left(-\frac{n}{m}\right)^{10}$.
98. $\left(-\frac{b}{x}\right)^{12} \times \left(-\frac{x}{c}\right)^9$.
99. $\left(-\frac{x}{y}\right)^{2m} \times \left(-\frac{y}{x}\right)^{2m-1}$.
100. $\left(-\frac{m}{n}\right)^{2m-1} \times \left(-\frac{n}{m}\right)^{2m+1}$.
101. $\left(-\frac{ab}{xy}\right)^8 \times \left(-\frac{ax}{by}\right)^{11}$.

II

$$a^m . b^m = (ab)^m.$$

Si p est pair :

$(a-b)^p = (b-a)^p$ $\qquad (a-b)^4 = (b-a)^4$
$(a-b)^{p+1} = -(b-a)^{p+1}$ $\qquad (a-b)^3 = -(b-a)^3$.

Comment multiplie-t-on des puissances ayant les mêmes exposants ?

Comment élève-t-on un produit à une puissance ?

Calculer de la manière la plus expéditive :

1. $2^8 \times 5^8$.
2. $125^7 \times 8^7$.
3. $5^3 \times 20^3$.
4. $4^6 \times 5^6 \times 5^6$.
5. $5^{12} \times 2^{10}$.
6. $8^6 \times 125^5$.
7. $25^7 \times 4^8$.
8. $8^6 \times (12^1/_2)^5$.
9. $3^8 \times 7^8$.
10. $123^5 \times 6^5$.
11. $25^5 \times 29^5 \times 12^5$.
12. $3^4 \times 5^4 \times 8^4 \times 17^4$.
13. $(1\frac{3}{5})^6 \times (2\frac{1}{2})^6$.
14. $(1\frac{3}{7})^{10} \times (1\frac{2}{5})^{10}$.
15. $5{,}872^4 \times 0{,}875^4 \times 0{,}0027^4$.
16. $13^5 = 371293$, calculer 26^5.
17. $23^4 = 279841$, calculer 92^4.
18. Par quel nombre faut-il multiplier $6^{10} = 60466176$, pour obtenir 12^{10}, et quelle est la valeur de 12^{10} ?
19. $(5a - 6b)^p$. $(25a^2 + 36b^2)^p$. $(5a + 6b)^p$.
20. $\left(\frac{m+n}{p-q}\right)^x$. $\left(\frac{p+q}{m+n}\right)^x$. $\left(\frac{p-q}{m-n}\right)^x$.

21. $\left(\frac{4x^{p+1}}{5y^n}\right)^a \cdot \left(\frac{125y^{n-1}}{8xp}\right)^a.$ 22. $\frac{(2mn)^5 \cdot (3mn)^2 \cdot (5m)^4}{(3n)^3 \cdot (4mn)^6}.$

23. $(5abc)^{2p} \cdot (2ab)^{p+2} \cdot (2bc)^{p-2}.$ 24. $\left(\frac{7-c}{m-5}\right)^4 \cdot \left(\frac{5-m}{7-c}\right)^6.$

25. $\left(\frac{m-p}{x-y}\right)^8 \cdot \left(\frac{y-x}{p-m}\right)^{10}.$ 26. $\left(\frac{8-a}{x-y}\right)^4 \cdot \left(\frac{x-y}{a-8}\right)^3.$

27. $\left(\frac{c-d}{h-m}\right)^3 \cdot \left(\frac{m-h}{d-c}\right)^7.$ 28. $\left(\frac{x-y}{a-b}\right)^{2m} \cdot \left(\frac{b-a}{x-y}\right)^{2m+1}.$

29. $\left(\frac{a-b}{x-y}\right)^{2n} \cdot \left(\frac{y-x}{b-a}\right)^{2n-1}.$

30. $\left(\frac{4-y}{m-1}\right)^{2m+1} \cdot \left(\frac{-5y}{y-4}\right)^{2m} \cdot \left(\frac{1-m}{4-y}\right)^2.$

31. $\left(\frac{a^2-b^2}{x^4-y^4}\right)^5 \cdot \left(\frac{x^4-y^4}{b^2-a^2}\right)^7.$ 32. $\left(\frac{a^2-b^2}{x^3-y^3}\right)^3 \cdot \left(\frac{x^6-y^6}{b^2-a^2}\right)^4.$

33. $\left(\frac{a^4-b^4}{x^6-y^6}\right)^5 \cdot \left(\frac{y^3-x^3}{b^2-a^2}\right)^7.$

34. $\left(\frac{m^8-n^8}{x^5-y^5}\right)^{2m} \cdot \left(\frac{y^{10}-x^{10}}{n^4-m^4}\right)^m \cdot \left(\frac{x^5-y^5}{m^4+n^4}\right)^m.$

III

$$(a^m)^n = a^{mn} = a^{nm} = (a^n)^m.$$

Comment élève-t-on une puissance à une autre puissance? Que signifie une puissance dont l'exposant est un produit?

1. $(a^4)^3.$ 2. $[(b^3)^2]^5.$ 3. $[(x^4)^n]^2.$ 4. $(x^3)^{p+1}.$
5. $(x^{m+1})^2.$ 6. $(-a^3)^2.$ 7. $(-a^2)^3.$ 8. $(-m^3)^7.$
9. $(-y^3)^{2m}.$ 10. $(-y^3)^{4m+1}.$ 11. $(-y^{2m})^3.$ 12. $(-y^{3m})^2.$
13. $(-b^2)^{2m-1}.$ 14. $(-b^{2m-1})^2.$ 15. $(-b^{2n})^{2n-1}.$ 16. $(-b^{2n-1})^{2n}.$
17. $(a^3b^2)^3.$ 18. $(a^5b^7)^6.$ 19. $(m^np)^5.$ 20. $(5a^{n-1}b^2)^2.$
21. $(3a^3b^{n-2})^3.$ 22. $(4a^{m-1}b^{n+1})^3.$ 23. $(7a^2x^{n-2}y^{m+1})^3.$
24. $(8a^nb^{n-1}c^{n-2})^3.$ 25. $\left(\frac{a^2b^3}{c^4d^5}\right)^2.$ 26. $\left(\frac{3xy^3}{4m^2n^5}\right)^3.$
27. $\left(\frac{a^9b^{28}c^{47}}{d^{10}e^{29}}\right)^3.$ 28. $\left(\frac{4a^nb^{n-1}}{3c^{2n}d^{3n-1}}\right)^3.$ 29. $\frac{(a^2x^3)^4}{(ax)^5}.$
30. $\frac{(m^3n^5)^3}{(mn)^q}.$ 31. $\frac{(ab)^6}{(a^2b^3)^3}.$ 32. $\frac{(a^6b^3)^2}{(a^5b^2)^4}.$

33. $\left(\frac{a^9b^{28}c^{47}}{d^{10}e^{29}}\right)^{17} \times \left(\frac{d^9e^{26}}{a^8b^{25}c^{42}}\right)^{19}$. **34.** $\frac{[(8x-6y)^{2a}]^{5a}}{[(4x-3y)^{5a}]^{2a}}$.

35. $[(ax)^{3y+4z}]^{5y-6z}$. **36.** $\left(\frac{4a^{n-1}b^3c^{3-m}}{9x^2y^{3n-2}z^6}\right)^2 \times \frac{3xy^{2n-2}z^4}{2a^nb^2c^{2-m}}$.

37. $\frac{(p^{3a-5b})^{7a-4b}}{(p^{2a-3b})^{4a-8b}}$. **38.** $\frac{[(a^{2x-y})^{x-2y}]^{12}}{[(a^{2x-3y})^{6x-7y}]^3}$.

39. $\left[\left(\frac{m^5n^3}{p^2q^2}\right)^3 \times \left(\frac{mq^3}{n}\right)^4\right] : \left[\left(\frac{m^3n}{p^2q^3}\right)^5 : \left(\frac{m^2q^3}{n^2p}\right)^6\right]$.

40. $\left[\left(\frac{a^4b^3}{c^2x^3}\right)^5 : \left(\frac{ax^3}{bc^4}\right)^4\right] : \left[\left(\frac{ab^3}{c^2x^3}\right)^6 : \left(\frac{a^2x^3}{b^2c^3}\right)^5\right]$.

Décomposer en facteurs :

41. $x^{2m}-x^{2n}$. **42.** $x^{3m}-x^{3n}$. **43.** $a^{4x}-a^{4y}$. **44.** $a^{5x}-b^{5y}$.

45. $\left(\frac{a}{b}\right)^{2m} - \left(\frac{x}{y}\right)^{2n}$. **46.** $\left(\frac{3ab}{d}\right)^{4x} - \left(\frac{4cd}{m}\right)^{4y}$.

Calculez la valeur numérique de :

47. 4^{12}, sachant que $4^6 = 4096$.
48. 2^{18}, sachant que $2^6 = 64$.
49. 3^{15}, sachant que $3^5 = 243$.
50. $(5^3)^7$, sachant que $5^7 = 78125$.
51. $3{,}317^6$, sachant que $3{,}317^2 = 11$ approximativement.
52. $2{,}224^9$, sachant que $2{,}224^3 = 11$ approximativement.

IV

$$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n}, \text{ pour } m > n. \\ a^0 = 1, \text{ pour } m = n. \\ a^{-(n-m)} = \frac{1}{a^{n-m}}, \text{ pour } m < n. \end{cases}$$

$$a^5 : a^3 = a^2. \qquad a^5 : a^5 = a^0 = 1.$$

$$a^5 : a^9 = a^{-4} = \frac{1}{a^4}. \text{ (1)}$$

Comment divise-t-on deux puissances de même base l'une par l'autre ?

Connaissant $5^9 = 1953125$, comment trouve-t-on 5^7 ?

(1) Pour les exercices sur les quantités affectées d'exposants négatifs, voir plus loin, paragraphes VI à XI.

1. $c^x : c$. **2.** $c^x : c^3$. **3.** $c^{5x} : c^{3x}$.
4. $m^{x+3} : m^3$. **5.** $m^{y+5} : m^6$. **6.** $m^{x+y} : m^y$.
7. $x^a : x^{3b}$. **8.** $x^{a+b} : x^{a-b}$. **9.** $x^{a-b} : x^{b-a}$.
10. $a^{3x+2y} : a^{2x-3y}$. **11.** $b^{y+3z} : b^{2y-3z}$. **12.** $m^{3p+q} : m^{2p-q}$.
13. $(a+b)^m : (a+b)$. **14.** $(m+n)^p : (m+n)^q$.
15. $(x+y)^{a-b} : (x+y)^{b-a}$. **16.** $\dfrac{x^{4m+n}}{y^{2m-6n}} \times \dfrac{y^{6m+3n}}{x^{14n-13m}}$.
17. $\dfrac{a^{6x-3y}}{b^{4x-7y}} \cdot \dfrac{b^{13y-7x}}{a^{2x-5y}}$. **18.** $\dfrac{a^{p+3q}b^{7p-8q}}{a^{4p-7q}b^{3p-11q}} : \dfrac{a^{2(p-3q)}b^{5p+6q}}{a^{6p-17q}b^{2(p+2q)}}$.
19. $x^{4p} - 1 : x^p - 1$. **20.** $(x^{6r} - y^{6r}) : (x^r - y^r)$.
21. $(a^{15p} + b^{10q}) : (a^{3p} + b^{2q})$. **22.** $(x^{5d} - 243) : (x^d - 3)$.
23. $(a^{4m} + 4a^{2m}x^{2n} + 16x^{4n}) : (a^{2m} + 2a^mx^n + 4x^{2n})$.
24. $(9x^p + 3x^{4p} + 14x^{3p} + 2) : (1 + 5x^p + x^{2p})$.
25. $(a^{6x-12y} - 16a^{3x-6y}b^{3x+9y} + 64b^{6x+18y}) : (a^{2x-4y} - 4a^{x-2y}b^{x+3y} + 4b^{2x+6y})$.
26. $(a^n - b^n) : a - b$. **27.** $(a^{2n} - b^{2n}) : (a+b)$.
28. $(a^{2n+1} + b^{2n+1}) : (a+b)$.
29. $(nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1) : (x-1)^2$.
30. $\dfrac{(a^{n+x} - a^n)(a^n - a^{n-x})}{(a^{n+x} - a^n) - (a^n - a^{n-x})}$.

V

$$a^m : b^m = (a : b)^m = \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m.$$

$$1 : b^n = (1 : b)^n = \frac{1}{b^n} = \left(\frac{1}{b}\right)^n.$$

Comment divise-t-on des puissances à exposants égaux, l'une par l'autre?

Comment élève-t-on un quotient à une puissance?

Calculez :

1. $\dfrac{8^7}{2^7}$. **2.** $\dfrac{51^3}{17^3}$. **3.** $\dfrac{9^5.13^5}{78^5}$. **4.** $\dfrac{1{,}57075^6}{3{,}1415^6}$.

5. $\dfrac{(25\frac{2}{3})^3}{(2\frac{1}{3})^3}$. **6.** $\dfrac{(12\frac{4}{5})^5}{(3\frac{1}{5})^5}$. **7.** $\dfrac{(1357{,}95)^4}{(12{,}345)^4}$. **8.** $\dfrac{(22^2/_5)^5}{(3^1/_5)^5}$.

9. $51^4 = 6765201$; calculer 17^4.

10. En admettant qu'approximativement $1{,}818^{20} = 155553$, calculer $0{,}606^{20}$ avec 8 décimales.

11. $\left(\frac{5a^3}{3c}\right)^n : \left(\frac{15a^2}{6c^3}\right)^n$.   12. $\left(\frac{5a^3b^4c^5}{7d^2f^3g^4}\right)^p : \left(\frac{20a^5b^4c^3}{21d^3f^4g^5}\right)^p$.

13. $\frac{(20a^4 + 8a^2b^2 - 12b^4)^x}{\{4(a^2 + b^2)\}^x}$.   14. $\frac{(64m^2 - 49n^2)^b}{(8m - 7n)^b}$.

15.(1) $\frac{2187^x - 1}{3^x - 1}$.   16.(2) $\frac{1}{0{,}25^3}$.   17. $\frac{1}{(0{,}5)^6}$.   18. $\frac{1}{(\frac{1}{3})^5}$.

Réduisez à la forme la plus simple les produits suivants :

19. $\left(\frac{3mn}{5pq}\right)^4 \cdot \left(\frac{5p}{6m}\right)^3 \cdot \left(\frac{4n}{3q}\right)^2$.

20. $\left(\frac{m+n}{p-q}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{m+n}\right)^2 \cdot \left(\frac{p-q}{3(m+n)}\right)^5$.

21. $\left(\frac{a+b}{c}\right)^{3m+1} \cdot \left(\frac{cd}{a+b}\right)^{2m-2} \cdot \left(\frac{a+b}{df}\right)^{4m-7} \cdot f^{2m}$.

II. PUISSANCES MARQUÉES PAR DES EXPOSANTS ENTIERS NÉGATIFS

VI

$$a^m : a^m = a^0 = 1. \qquad a^5 : a^9 = a^{-4} = \frac{1}{a^4}.$$

$$a^{3m-2n} = \frac{a^{3m}}{a^{2n}}.$$

Que vaut une quantité finie élevée à la puissance zéro?

Que représente une quantité finie affectée d'un exposant négatif?

---

(1) Voir dans la 1re série, page 56, les résultats remarquables de la division.

(2) Employer la seconde formule du paragraphe rappelé ci-dessus.

Ecrivez les quantités suivantes sans employer ni l'exposant zéro ni les exposants négatifs, et simplifiez les résultats.

1. x^0. 2. a^{-3}. 3. $\frac{1}{x^0}$. 4. $\frac{1}{a^{-4}}$. 5. x^{-0}. 6. $\frac{1}{x^{-0}}$.

7. $a^3.a^0$. 8. $a^3.a^{-0}$. 9. $\frac{a^5}{q^{-0}}$. 10. $m^{-3}.x^{-0}$. 11. $m^{-3}.x^0$.

12. $\frac{m^{-3}}{x^{-0}}$. 13. $b^m.b^0$. 14. $b^m d^{-0}$. 15. $b^m.d^{-5}$. 16. $x^0.y^0$.

17. $x^{-0}.y^{-0}$. 18. $(x+y)^0$. 19. x^0+y^0. 20. x^0+x^0.

21. $x^0 x^0$. 22. $0x.0x$. 23. $x^{-0}+y^{-0}$. 24. $(x+y)^{-0}$.

25. 0^{-x}. 26. 0^{-4}. 27. $(-a)^{-2}$. 28. $(-x)^{-4}$.

29. $(-x)^{-3}$. 30. $(-x^3)^{-5}$. 31. $\frac{a^2}{a^{-3}}$. 32. $\frac{1}{m^{-2}}$. 33. $(-x^2)^0$.

34. $\frac{1}{m^0}$. 35. $\frac{1}{m^{-0}}$. 36. $\frac{a^0}{b^n}$. 37. $\frac{a^0}{b^{-n}}$. 38. $\frac{x^{-n}}{y^0}$.

39. $\frac{x^{-n}}{y^{-0}}$. 40. $\frac{m^{-5}}{n^{-3}}$. 41. $\frac{a^{-x}}{b^{-x}}$. 42. $\frac{a^{-m}}{b^{-n}}$. 43. $\frac{m^{-6}}{m^{-5}}$.

44. $\frac{a^{n-4}}{a^{-5}}$. 45. $\frac{p^{-3}}{p^{m-4}}$. 46. $\frac{a^{m-2}}{b^{n-3}}$. 47. $\left(\frac{1}{n}\right)^{-4}$. 48. $\left(\frac{x}{y}\right)^{-1}$.

49. $\left(\frac{x}{y}\right)^0$. 50. $\left(\frac{y}{z}\right)^{-0}$. 51. $\frac{1}{m}\left(\frac{a}{m}\right)^{-1}$. 52. $p^2\left(\frac{p}{q}\right)^{-2}$.

53. $m(1-m)^{-1}$. 54. $n(1-n)^{-0}$.

55. $(1+x)(1-x^2)^{-1}$. 56. $(1+y)^2(1-y^2)^{-2}$.

57. $(m-n)^8(m-n)^{-4}$. 58. $(a-1)^{-6}.(1-a)^3$.

59. $\frac{3a^0b^{-2}c^{-4}}{5a^{-1}b^{-3}c^{-5}}$. 60. $\frac{4(a^0+b^0)^{-2}x^{-5}}{5x^{-3}y^{-4}}$.

61. $\frac{a^0b^{-2}}{9(x^0+y^0+z^0)^{-2}c^3}$. 62. $\frac{a^2b^{-4}}{x^{-3}y^{-5}}.\frac{a^{-2}b^4}{x^5y^3}$.

63. $\frac{8a^{-5}}{a^2}.\frac{(a^0+y^0)^{-3}}{a^{-10}}$. 64. $\frac{m^{2x+4}m^{-(x+5)}}{n^{x-3}}$.

65. $(a^{2x-3})^{-2}$. 66. $m^{3x-5}-n^{5x-3})^{-x}$. 67. $\left(\frac{a^{-3x}+b^{-2y}}{a^{-6x}-b^{-4y}}\right)^{-3}$.

68. $(x^{3-m}+y^{4-n})^{-2}$. 69. $\left(\frac{a^{-1}+b^{-1}}{a^{-2}-b^{-2}}\right)^{-2} : \left(\frac{a^{-2}+b^{-2}}{a^{-4}-b^{-4}}\right)^{-3}$.

70. $\left(\frac{m^{-2}+n^{-2}}{m^{-4}-n^{-4}}\right)^{-3} : \left(\frac{m^{-1}+n^{-1}}{n^{-2}-m^{-2}}\right)^{-2}$.

Ecrivez les quantités suivantes sous forme entière en employant les exposants négatifs.

71. $\frac{1}{a}$. **72.** $\frac{1}{a^2}$. **73.** $\left(\frac{1}{a}\right)^2$. **74.** $\frac{1}{a^m}$.

75. $\frac{a^m}{b^n}$. **76.** $\left(\frac{a}{b}\right)^x$. **77.** $\frac{2}{(-a)}$. **78.** $\frac{5}{(-m)^5}$.

79. $\frac{3}{m}$. **80.** $\frac{x}{(-y)^3}$. **81.** $\frac{x}{(-z^3)}$. **82.** $\frac{b}{(-p)^4}$.

83. $\frac{b}{(-p^4)}$. **84.** $a^5 \times \frac{1}{a^3}$. **85.** $b^m \times \frac{1}{b^n}$. **86.** $z^{m+1} \times \frac{1}{z^p}$.

87. $\frac{1}{x^6} \times m$. **88.** $\frac{xy}{x+y}$. **89.** $\frac{a}{y^4} + \frac{b}{y^3} + \frac{c}{y^2} + \frac{d}{y} + \frac{e}{1}$.

90. $\left(\frac{a^m}{xy^2}\right)^3$. **91.** $\frac{b^n}{by^5}$. **92.** $\frac{c^4}{c^m z p}$. **93.** $\frac{x^m}{x^5} + \frac{y^n}{y^3}$.

94. $\dfrac{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}}{\frac{1}{p} - \frac{1}{y}}$. **95.** $\dfrac{\left(\frac{1}{m^3} + \frac{1}{n^4}\right)^3}{\left(\frac{1}{x^5} - \frac{1}{y^7}\right)^4}$. **96.** $\dfrac{1}{\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^4}\right)^3}$.

97. $\dfrac{1}{\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y}\right)^2}$. $\dfrac{1}{\left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{y^4}\right)^3}$.

98. $\frac{1}{(x+y)^2} : \frac{1}{x^2+y^2}$. **99.** $\frac{1}{m^2} \cdot \frac{1}{n^2} : \frac{3}{m^4 n^4}$.

100. $\dfrac{1}{\frac{x+y}{x-y}}$. **101.** $\dfrac{1}{\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^3}$. **102.** $\left(\frac{1}{1-z}\right)^7$.

Calculez la valeur numérique des quantités suivantes :

103. $\frac{1}{2^0}$. **104.** $\frac{1}{2^{-1}}$. **105.** $\frac{2}{3^{-2}}$. **106.** $\frac{5}{(-4)^3}$.

107. $\frac{3}{(-5)^{-3}}$. **108.** $\frac{2^{-4}}{4^{-2}}$. **109.** 2^{-1}. **110.** 1^{-1}.

111. 5^{-2}. **112.** 100×5^{-3}. **113.** $7^0(x+y)^0$.

114. 1^{-n}. **115.** 25×5^{-2}. **116.** 64×4^{-3}.

117. $(0,5)^{-2} \times 1000$. **118.** $(0,3)^{-4} \times 810$. **119.** $(-0,8)^{-2} \times 256$.

120. $\frac{10}{2^{-3}}$. **121.** $\frac{5}{3^{-4}}$. **122.** $\frac{20}{(-1)^{-3}}$. **123.** $\frac{20}{(-1)^{-4}}$.

124. $\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$. **125.** $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$. **126.** $2^{-1} - 2^{\,2}$. **127.** $9^{-2} - 3^{-4}$.

128. $\frac{1}{15^{-3}} - \frac{1}{4^{-4}}$. **129.** $\frac{1}{5^{-4}} - \frac{1}{10^{-2}}$.

130. $\dfrac{\frac{1}{4^{-3}} - \frac{2}{10^{-2}}}{\frac{1}{2^{-2}} + \frac{1}{4^{-1}}}$. **131.** $\left(\dfrac{4^{-5} - \frac{1}{3^{-9}}}{\frac{1}{5^{-4}} + 8^{-2}}\right)^{0}$.

132. $64 \times 2^{-4} + 32 \times 2^{-3} + 16 \times 2^{-2} + 8 \times 2^{-1} + 4 \times 2^{0}$.

VII

$$a^m.a^{-n} = a^{m-n}. \qquad a^{-m}.a^{-n} = a^{-(m+n)}.$$

$$(-a)^{-n} = \frac{1}{(-a)^n} = \pm \frac{1}{a^n}.$$

Sachant que $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$, prouvez les propositions résumées ci-dessus.

Effectuez les opérations suivantes :

1. $a^4.a^{-3}$. **2.** $m^7.m^{-3}$. **3.** $x^{10}.x^{-6}$. **4.** $b^{-5}.b^8$.
5. $n^0.n^{-4}.n^{-7}$. **6.** $y^5.y^{-7}$. **7.** $z^{-6}.z^4$. **8.** a^5a^{-6}.
9. h^mh^{-n}. **10.** $d^{-p}.d^q$. **11.** $e^{-x}.e^x$. **12.** $p^{-a}.p^b$.
13. $ab^{-5}.a^{-1}b^4$. **14.** $m^{-2}n^3.m^4n^{-5}$. **15.** $x^0y^5.x^{-4}y^{-3}$.
16. $b^mc^{-p}.b^{-n}c^q$. **17.** $a^0b^{-m}.a^3b^n$. **18.** $a^m.a^{-n}.a^{-2m}$.
19. $a^{-4}.a^{-3}$. **20.** $b^{-2}.b^{-5}$. **21.** $m^{-7}.m^{-1}$.
22. $n^{-5}n$. **23.** $x^{-m}.x^{-p}$. **24.** $y^{-a}.y^{-c}$.
25. $z^0.z^{-3}$. **26.** $z^{-0}.z^{-4}$. **27.** $u^{-p}.u^{-q}$.
28. $v^{-m}.v^{-2n}$. **29.** $x^{-2m}.x^{-3m}$. **30.** $y^{-5x}.y^{-x}$.
31. $a^{-1}.a^{-2b}$. **32.** $a^{-2x}a^{-2y}$. **33.** $c^{-4}.c^{-4x}$.
34. $m^{3x}.m^{-3y}$. **35.** $n^{-0}.n^{-4}.n^2$. **36.** $p^{-2x}.p^{-2y}.p^{-4z}$.
37. $(-a)^{-2}$. **38.** $(-b)^{-3}$. **39.** $(-x)^{-7}$.

40. $(-y)^{-10}$. **41.** $(-m)^{-2}.(-m)^{-3}$. **42.** $(-x)^{-1}.(-x)^{-3}$.
43. $(-m)^{-2n}.(-m)^{-2n+1}$. **44.** $(-x)^{-m}.(-x)^{-(m+1)}$.
45. $x^{-5}(-x)^{-4}$. **46.** $x^{-4}(-x)^{-5}$. **47.** $(-y)^{-m}.(-y)^{-m}$.
48. $(a^{-4}+a^{-3}+a^{-2}+a^{-1})\times a^{-3}$.
49. $(m^{-5}-m^{-4}+m^{-3}-m^{-2}+m^{-1})\times(-m)^{-3}$.
50. $(x^{-4}-x^{-3}+x^{-2}-x^{-1}+x^{0})\times(-x)^{-4}$.
51. $(y^{-5}+y^{-4}+y^{-3}+y^{-2}+y^{-1}+1)\times(-y)^{-5}$.
52. $\frac{a^{-1}}{b^{-2}}\cdot\frac{a^{-2}}{b^{-1}}$. **53.** $\left(\frac{1}{x}\right)^{-1}\times\left(\frac{y}{x}\right)^{-2}$.
54. $\left(\frac{m}{n}\right)^{-5}\times\left(-\frac{m}{n}\right)^{-3}$. **55.** $\frac{a^{-1}b^{-2}}{m^{-3}n^{-4}}\cdot\frac{a^{-2}b^{-3}}{m^{-2}n^{-1}}\cdot\frac{m^{-6}n^{-7}}{a^{-3}b^{-8}}$.
56. $(a^{-3}+2a^{-2}b^{-1}-4a^{-1}b^{-2}+3b^{-3})\times(2a^{-1}-4b^{-1})$.
57. $(x^{-1}-2x^{-2}+3x^{-3})\times(x^{0}+x^{-1}-x^{-2})$.
58. $(a^{2}+2ab^{-3}-4a^{0}b^{-2}+3a^{-1}b^{-1})\times\left((-a)^{2}-2(-b)^{-2}\right)$.
59. $(x^{-1}b^{-4}-x^{-2}b^{-3}+2x^{-3}b^{-2}-3x^{-4}b^{-1})\times$
$(x^{-1}b^{-2}-2x^{-2}b^{-1})$.
60. $\left(\frac{a^{-1}}{b^{-3}}+\frac{2a^{-2}}{b^{-2}}-\frac{3a^{-3}}{b^{-1}}\right)\times\left(\frac{2a}{b^{-1}}-\frac{a^{-1}}{b}\right)$.
61. $\left(\frac{2x^{-0}}{y^{-4}}-\frac{4x^{-2}}{y^{-2}}+\frac{6x^{-4}}{y^{0}}\right)\times\left(\frac{x^{-1}}{4y^{-5}}+\frac{x^{-3}}{2y^{-3}}-\frac{x^{-5}}{3y^{-1}}\right)$.
62. $(a^{-3}+b^{-5})(a^{-3}-b^{-5})$. **63.** $(m^{-1}-n^{-1})(m^{-1}+n^{-1})$.
64. $(2x^{-2}+3y^{-3})(2x^{-2}-3y^{-3})$.
65. $(b^{-m}+c^{-n})(b^{-m}-c^{-n})$.
66. $(3ab^{-3}+2c^{-1}x^{-2})(3ab^{-3}-2c^{-1}x^{-2})$.
67. $(2a^{-x}+3b^{-2y})(2a^{-x}-3b^{-2y})$.
68. $\left(\frac{a^{-1}}{b^{-m}}+\frac{c^{-4}}{d^{-3}}\right)\left(\frac{a^{-1}}{b^{-m}}-\frac{c^{-4}}{d^{-3}}\right)$.
69. $\left(\frac{1}{m^{-x}}+\frac{2}{n^{-3y}}\right)\left(\frac{1}{m^{-x}}-\frac{2}{n^{-3y}}\right)$.
70. $\left(\frac{a^{-m}}{x^{-n}}+\frac{b^{-p}}{c^{-2q}}\right)\left(\frac{b^{-p}}{c^{-2q}}-\frac{a^{-m}}{x^{-n}}\right)$.
71. Que deviennent *a*) $m^{x-y} : (x-y)^{n}$; *b*) $m^{x-y} : (x-y)^{-n}$ quand $x=y$?
72. Que valent *a*) $(x:y)^{m}$; *b*) $(x:y)^{-m}$ quand $x<y$ et que $m=\infty$?

VIII

$$a^{-m}.b^{-m} = (ab)^{-m}. \qquad (a - b)^{-2m} = (b - a)^{-2m}.$$
$$(a - b)^{-(2m+1)} = -(b - a)^{-(2m+1)}.$$

Comment démontre-t-on les propositions résumées en tête de ce paragraphe?

Effectuez les opérations suivantes :

1. $4^{-2} \times 3^{-2}$. **2.** $5^{-1} \times 6^{-1}$. **3.** $8^{-2} \times 5^{-2}$.
4. $1^{-3} \times 2^{-3} \times 3^{-3}$. **5.** $5^{-4} \times 2^{-4}$. **6.** $(4 - 1)^{-2}$.
7. $(1 - 4)^{-2}$. **8.** $(5 - 2)^{-3}$. **9.** $-(2 - 5)^{-3}$.
10. $(\frac{2}{3})^{-2} \times (\frac{3}{4})^{-2}$. **11.** $0{,}2^{-4} \times 0{,}5^{-4}$. **12.** $0{,}8^{-3} \times 0{,}2^{-3}$.
13. $(\frac{1}{5})^{-3} \times (\frac{1}{2})^{-3}$. **14.** $(\frac{3}{4})^{-2} \times 0{,}7^{-2}$. **15.** $2^{-5} \times 0{,}2^{-5}$.
16. $a^{-1} \times b^{-1}$. **17.** $m^{-2}.n^{-2}$. **18.** $2x^{-3}.y^{-3}$.
19. $y^{-5}.5z^{-5}$. **20.** $3a^{-4}.2h^{-4}$. **21.** $\frac{1}{2}a^{-7}.\frac{4}{3}a^{-7}$.
22. $5m^{-8}.\frac{1}{5}n^{-8}$. **23.** $14b^{-6}.\frac{1}{7}l^{-6}$. **24.** $(2a)^{-3}.(3b)^{-3}$.
25. $(\frac{1}{2}a)^{-1}.(2c)^{-1}$. **26.** $(\frac{3}{5}x)^{-4}.(\frac{5}{9}y)^{-4}$. **27.** $(\frac{14}{5}y)^{-7}.(\frac{5}{7}a)^{-7}$.
28. $(0{,}3a)^{-1}.(0{,}5b)^{-1}$. **29.** $(2a)^{-4}.(0{,}5b)^{-4}$.
30. $(10m)^{-5}.(0{,}3n)^{-5}$. **31.** $(a - b)^{-4}(b - a)^{-4}$.
32. $(x^2 - y^2)^{-8}(y^2 - x^2)^{-8}$. **33.** $(3m^5 - 2n)^{-2}(2n - 3m^5)^{-2}$.
34. $(2a^3 - 5b^{-1})^{-3}(5b^{-1} - 2a^3)^{-3}$.
35. $(2 - 5m^4)^{-5}(5m^4 - 2)^{-5}$. **36.** $(1 - x^2)^{-7}(x^2 - 1)^{-7}$.
37. $(0{,}1 - 0{,}4y^6)^{-1}(0{,}4y^6 - 0{,}1)^{-1}$.
38. $(0{,}5a - 0{,}1b^2)^{-9}(0{,}1b^2 - 0{,}5a)^{-9}$.
39. $(1^{-4} - m^{-5})^{-5}(m^{-5} - 1^{-1})^{-5}$.

40. $\left(\frac{a^2}{b} + \frac{m^{-1}}{n^{-2}}\right)^{-3}\left(\frac{a^2}{b} - \frac{m^{-1}}{n^{-2}}\right)^{-3}$.

41. $\left(\frac{x}{y^3} - \frac{z^{-1}}{y^{-4}}\right)^{-7}\left(\frac{x}{y^3} + \frac{z^{-1}}{y^{-4}}\right)^{-7}$.

42. $\left(\frac{1}{y^4} - \frac{a^{-1}}{m^{-5}}\right)^{-5}\left(\frac{1}{y^4} + \frac{a^{-1}}{m^{-5}}\right)^{-5}$.

43. $\left(\frac{3x}{a} + \frac{2m^{-1}}{b^{-2}}\right)^{-2}\left(\frac{2m^{-1}}{b^{-2}} - \frac{3x}{a}\right)^{-2}$.

44. $\left(\frac{x^{-3}}{y^{-4}} + \frac{a^{-1}}{z^2}\right)^{-3}\left(\frac{a^{-1}}{z^2} - \frac{x^{-3}}{y^{-4}}\right)^{-3}$.

45. $\left(\frac{2}{y^{-3}} + \frac{1}{z^{-1}}\right)^{-6}\left(\frac{1}{z^{-1}} - \frac{2}{y^{-3}}\right)^{-6}$.

46. $\left(0{,}1 + \frac{a}{b^{-2}}\right)^{-3}\left(\frac{a}{b^{-2}} - 0{,}1\right)^{-3}$.

47. $\left(0{,}4x^{-3} - \frac{1}{y^{-1}}\right)^{-1}\left(\frac{1}{y^{-1}} + 0{,}4x^{-3}\right)^{-1}$.

48. $\left(\frac{3}{2x^{-1}} + y^{-2}\right)^{-5}\left(y^{-2} - \frac{3}{2x^{-1}}\right)^{-5}$.

49. $\left(\frac{5x^{-1} - 3y^{-2}}{2a^{-4} + 3b^{-5}}\right)^{-5} \cdot \left(\frac{4a^{-8} - 9b^{-10}}{25x^{-2} - 9y^{-4}}\right)^{-5}$.

50. $\left(\frac{3a^{-1} + 2b^{-3}}{9a^{-2} + 4b^{-6}}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{81a^{-4} - 16b^{-12}}{9a^{-2} - 4b^{-6}}\right)^{-3}$.

51. $\left(\frac{2a^{-2} + 5b^{-2}}{m^{-1}n + 3y^{-5}}\right)^{-4} \times \left(\frac{m^{-2}n^2 - 9y^{-10}}{4a^{-4} - 25b^{\ 4}}\right)^{-4}$.

52. $\left(\frac{9x^{-6} - 0{,}25y^{-2}}{0{,}1m^{-1} + 3n^{-4}}\right)^{-5} : \left(\frac{3x^{-3} - 0{,}5y^{-1}}{0{,}01m^{-2} - 9n^{-8}}\right)^{-5}$.

53. $\left(\frac{16x^{-2} - 0{,}16z^{-4}}{a^{-3} + 2m^{-1}}\right)^{-2} : \left(\frac{4x^{-1} + 0{,}4z^{-2}}{a^{-6} - 4m^{-2}}\right)^{-2}$.

54. $\left(\frac{1 - x^{-8}}{0{,}49 - 4z^{-8}}\right)^{-7} : \left(\frac{1 + x^{-4}}{0{,}7 + 2z^{-4}}\right)^{-7}$.

IX

$$(a^{-m})^n = a^{-mn} = (a^{-n})^m.$$
$$(a^m)^{-n} = a^{-mn} = (a^{-n})^m = (a^n)^{-m}.$$
$$(a^{-m})^{-n} = a^{mn}.$$

Calculez la valeur de :

1. $(2^{-3})^2$. 2. $(2^{-2})^3$. 3. $(5^{-3})^{-4}$. 4. $(5^{-4})^3$.
5. $(10^{-2})^4$. 6. $(3^{-2})^{-3}$. 7. $(4^{-4})^{-3}$. 8. $(5^{-1})^{-3}$.
9. $(5^{-3})^{-1}$. 10. $\left[(3^{-2})^{-3}\right]^{-4}$. 11. $\left[(2^{-3})^{-2}\right]^2$. 12. $(100^{-1})^{-3}$.
13. $(\frac{2}{3})^{-3}$. 14. $(\frac{1}{5})^{-4}$. 15. $2^{-3} \times (\frac{3}{4})^{-2}$.
16. $(\frac{3}{5})^{-3} : (\frac{9}{10})^{-2}$. 17. $\left((2a)^{-2}\right)^{-3}$. 18. $\left[(4a)^{-2}\right]^2$.
19. $(x^{-3})^{-2}$. 20. $(y^2)^{-2}$. 21. $(-1^{-1})^{-2}$.

22. $(-a)^{-2}$. **23.** $\left[(-b)^{2}\right]^{-2}$. **24.** $(-m)^{-3}$.

25. $(a^{2}b^{-1})^{-2}$. **26.** $(m^{-1}n^{-3})^{-1}$. **27.** $(a^{-2}b^{-5})^{2}$.

28. $(-a^{-1}b^{-2})^{-3}$. **29.** $(-x^{-2}y^{-4})^{-5}$. **30.** $(-x^{-1}y^{-2})^{-2}$.

31. $(a^{-m})^{-n}$. **32.** $(b^{n})^{-3}$. **33.** $(d^{-5})^{-p}$.

34. $(c^{-x})^{2}$. **35.** $\left[(-m)^{-2x}\right]^{y}$. **36.** $\left[(-a)^{2y}\right]^{-1}$.

37. $(a^{-m}b^{x})^{-2}$. **38.** $(b^{-1}c^{-y})^{-3}$. **39.** $(h^{-m}v^{-n})^{-p}$.

40. $(-x^{-a}y^{-m})^{2n}$. **41.** $(-x^{-m}y^{-n})^{-2p}$. **42.** $(-b^{-m}c^{-n})^{2m+1}$.

43. $(-d^{-x}e^{-y})^{-(2m+1)}$. **44.** $(-3a^{-2})^{-2x}$.

45. $(-5m^{-p})^{2p+1}$. **46.** $\left[(-a^{-1})^{-2}\right]^{-3}$.

47. $\left[(-a^{-2})^{-2n}\right]^{-(2n+1)}$. **48.** $\left[(-a^{-1})^{-3}\right]^{-2n}$.

49. $\left[(-m^{-p})^{-2q}\right]^{-x}$. **50.** $\left(\frac{a^{-1}b^{2}}{c^{-m}d^{-n}}\right)^{-2}$.

51. $\left(\frac{a^{2}b^{-3}}{c^{-p}d^{-q}}\right)^{-x}$. **52.** $\left(\frac{a^{0}bc^{-3}}{x^{-2}y^{4}}\right)^{-m}$. **53.** $\left(\frac{x^{-1}y}{az^{0}}\right)^{-1}$.

54. $\left(\frac{mn^{0}}{x^{-p}y^{-q}}\right)^{-1}$. **55.** $\left(\frac{m+n}{m-n}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{m-n}{m+n}\right)^{-2}$.

56. $\left(\frac{m+n}{m-n}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{p+q}{m-n}\right)^{2}$. **57.** $\left(\frac{x-y}{a-b}\right)^{2} \cdot \left(\frac{x-y}{a+b}\right)^{-2}$.

58. $\left(\frac{x-y}{p+q}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{x+y}{p+q}\right)^{4} \cdot \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{-5}$.

59. $\left(\frac{m+n}{m-n}\right)^{-4} \cdot (m-n)^{-5} \cdot \left(\frac{1}{m+n}\right)^{-5}$.

60. $\left(\frac{1}{1+x}\right)^{5} \cdot \left(\frac{1}{1-x}\right)^{-7} \cdot \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{-6}$.

61. $\left[\left(\frac{a-b}{x+y}\right)^{-3}\right]^{2} \cdot \left[\left(\frac{x+y}{a-b}\right)^{-2}\right]^{3}$.

62. $\left[\left(\frac{a-b}{x+y}\right)^{-2}\right]^{-5} \cdot \left[\left(\frac{x+y}{a-b}\right)^{-5}\right]^{-3}$.

63. $\left[\left(\frac{a+b}{c-d}\right)^{-2}\right]^{7} \cdot \left[\left(\frac{c-d}{a+b}\right)^{-6}\right]^{2}$.

64. $\left[\left(\frac{a+b}{x-y}\right)^{-4}\right]^{-5} \cdot \left[\left(\frac{a+b}{y-x}\right)^{-7}\right]^{3}$.

65. $\left[\left(\frac{c-d}{m-n}\right)^{-3}\right]^{-5} \cdot \left[\left(\frac{d-c}{n-m}\right)^{7}\right]^{2}$.

X

$a^{-m} : a^{-n} = a^{-m+n}$. $a^{-5} : a^{-3} = a^{-2} = \frac{1}{a^2}$.

$a^{-m} : a^{n} = a^{-(m+n)}$. $a^{-5} : a^{-5} = a^0 = 1$.

$a^{m} : a^{-n} = a^{m+n}$. $a^{-5} : a^{-8} = a^3$.

Calculez la valeur numérique des exercices suivants :

1. $2^{-4} : 2^{-5}$. **2.** $3^{-4} : 3^{-7}$. **3.** $5^{-1} : 5^{-3}$.
4. $7^{-4} : 7^{-2}$. **5.** $6^{-7} : 6^{-3}$. **6.** $10^{-8} : 10^{-6}$.
7. $7^{-9} : 7^{-5}$. **8.** $3^2 : 3^{-2}$. **9.** $3^{-2} : 3^2$.
10. $7^{-3} : 7^2$. **11.** $25^{-8} : 25^{-8}$. **12.** $(\frac{3}{4})^{-5} : (\frac{3}{4})^{-3}$.
13. $(\frac{2}{3})^{-4} : (\frac{2}{3})^{-7}$. **14.** $(\frac{1}{2})^{2} : (\frac{1}{2})^{-3}$. **15.** $(\frac{2}{5})^{-5} : (\frac{2}{5})^{-2}$.
16. $(0,3)^{-1} : (0,3)^{-3}$. **17.** $(0,7)^{-6} : (0,7)^{-8}$. **18.** $(0,4)^{-7} : (0,4)^{-4}$.
19. $(0,1)^{-5} : (0,1)^{-2}$. **20.** $(0,2)^{-5} : (0,2)^{-2}$.

Effectuez les calculs suivants, et donnez les résultats débarrassés des exposants négatifs.

21. $a^{-3} : a^{-5}$. **22.** $a^{-4} : a^{-3}$. **23.** $a^{-7} : a^{-5}$.
24. $m^{-x} : m^{-2x}$. **25.** $m^{-(x+2)} : m^{-2x}$. **26.** $x^{-2a} : x^{-3a}$.
27. $y^{-a} : y^{-m}$. **28.** $b^{-m+1} : b^{-(m+1)}$.
29. $c^{-(2m+3z)} : c^{-(2m-3z)}$. **30.** $(a+b)^{-(x+y)} : (a+b)^{-(x-y)}$.
31. $(c-d)^{-(a-b)} : (c-d)^{-(b-a)}$.
32. $\frac{a^{-5}b^{-x}}{m^{-3}n^{-4}} : \frac{a^{-6}b^{-(x+2)}}{m^{-7}n^{-3}}$. **33.** $\frac{x^{-(a-4)}y^{-7n}}{c^{-5}d^{-(n-2)}} : \frac{x^{-2a}y^{-5n}}{c^{-3}d^{-(2-n)}}$.
34. $(a^{-6} - b^{-4}) : (a^{-3} - b^{-2})$.
35. $\left(\frac{x^{-8} - y^{-4}}{a^{-2} - b^{-6}}\right)^{-2} : \left(\frac{x^{-4} - y^{-2}}{a^{-1} + b^{-3}}\right)^{-3}$.
36. $\left(\frac{c^{-2n} - d^{-4m}}{xy}\right)^{-3} : \left(\frac{c^{-n} + d^{-2m}}{x^{-1}y^{-1}}\right)^{-2}$.
37. $(x^{-m} - 1) : (x - 1)$. **38.** $(x^m - 1) : (x^{-1} - 1)$.

39. $\frac{(b^7 + a^5)}{(v^8 - u^4)} \cdot \left(\frac{u^{-4} - v^{-8}}{a^{-5} + b^{-7}}\right)^{-4} : \left(\frac{u^{-4} - v^{-8}}{a^{-5} + b^{-7}}\right)^{-5}$.

40. $\left[\left(\frac{a^{-6} - b^{-4}}{c^{-8} - d^{-10}}\right)^{-3} : \left(\frac{a^{-3} + b^{-2}}{c^{-4} - d^{-5}}\right)^{-2}\right]^{-2} : \left[\left(\frac{c^{-8} - d^{-10}}{a^{-6} + b^{-4}}\right)^{-6} : \left(\frac{c^{-4} - d^{-5}}{a^{-3} + b^{-2}}\right)^{-3}\right]$.

XI

$$a^{-m} : b^{-m} = \left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^{m}. \quad 1 : b^{-m} = \left(\frac{1}{b}\right)^{-m} = b^m.$$

Calculez :

1. $5^{-8} : 10^{-8}$. 2. $3^{-5} : 2^{-5}$. 3. $14^{-3} : 7^{-3}$. 4. $8^{-5} : 16^{-5}$.
5. $9^{-4} : 3^{-4}$. 6. $1^{-7} : 2^{-7}$. 7. $3^{-4} : 1^{-4}$.
8. $(0,2)^{-3} : (0,5)^{-3}$. 9. $(0,6)^{-2} : (0,7)^{-2}$. 10. $3^{-5} : (0,3)^{-5}$.
11. $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} : \left(\frac{4}{15}\right)^{-3}$. 12. $\left(\frac{3}{4}\right)^{-4} : \left(\frac{9}{8}\right)^{-4}$. 13. $\left(\frac{3}{7}\right)^{-2} : \left(\frac{9}{28}\right)^{-2}$.
14. $\left(\frac{3^2/_5}{4^1/_5}\right)^{-3} : \left(\frac{8^1/_2}{10^1/_2}\right)^{-3}$. 15. $\left(\frac{13^1/_2}{11^1/_2}\right)^{-5} : \left(\frac{16^1/_5}{18^2/_5}\right)^{-5}$.
16. $(1 : a^{-m})^2 : \left(\frac{1}{a}\right)^{-2m}$. 17. $(a^x b^{-y})^{-3} : \left(\frac{a^{-x}}{b^y}\right)^{-3}$.
18. $\left(\frac{a^2}{b^{-3}}\right)^{-2} : \left(\frac{a^{-3}}{b^4}\right)^{-2}$. 19. $\left[\left(\frac{1}{a^{-2}}\right)^{-4} - \left(\frac{m^{-1}}{n^{-3}}\right)^{-2}\right] : \left[\left(\frac{1}{a^{-2}}\right)^{-2} - \left(\frac{m^{-1}}{n^{-3}}\right)^{-1}\right]$.
20. $\left[x^{-6} - \left(\frac{1}{y^{-1}}\right)^{-2}\right] : \left[x^{-3} + \left(\frac{1}{y^{-1}}\right)^{-1}\right]$.
21. $\left[\left(\frac{1}{y^{-1}}\right)^{2} - \left(\frac{x^{-3}}{y^{-2}}\right)^{-4}\right] : \left[\frac{1}{y^{-1}} + \left(\frac{x^{-3}}{y^{-2}}\right)^{-2}\right]$.

Effectuez les divisions successives suivantes :

22. $\left\{\left[\left(\left(\frac{a^{-1}}{b^{-2}}\right)^{-8} - \left(\frac{m^{-2}}{n^{-4}}\right)^{-16}\right) : \left(\left(\frac{a^{-1}}{b^{-2}}\right)^{-4} + \left(\frac{m^{-2}}{n^{-4}}\right)^{-8}\right)\right] : \left[\left(\frac{a^{-1}}{b^{-2}}\right)^{-2} + \left(\frac{m^{-2}}{n^{-4}}\right)^{-4}\right]\right\} : \left[\left(\frac{a^{-1}}{b^{-2}}\right)^{-1} - \left(\frac{m^{-2}}{n^{-4}}\right)^{-2}\right]$.

23. $\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{b}{a}\right)^{-2}+\left(1+\dfrac{a}{b}\right)^{-2}} : \dfrac{a^{-2}+b^{-2}}{a^{-2}-b^{-2}} : \dfrac{a^{-1}-b^{-1}}{a^{-1}+b^{-1}}.$

24. Simplifiez : $\dfrac{(a^{-1}b^{-1}+c^{-1}d^{-1})^2-(a^{-1}c^{-1}+b^{-1}d^{-1})^2}{(a^{-2}-d^{-2})(b^{-2}-c^{-2})}.$

III. PUISSANCES MARQUÉES PAR DES EXPOSANTS FRACTIONNAIRES, POSITIFS OU NÉGATIFS (1).

XII

$$(a^m)^p = a^{mp}; \qquad \text{donc } \sqrt[p]{a^{mp}} = a^m = a^{\frac{mp}{p}}.$$

$$\sqrt[m]{a^{-2}} = \sqrt[m]{\frac{1}{a^2}} = \frac{1}{a^{\frac{2}{m}}} = \frac{1}{\sqrt[m]{a^2}}.$$

$$\sqrt[m]{\frac{a^x}{b^y}} = \frac{\sqrt[m]{a^x}}{\sqrt[m]{b^y}} = \frac{a^{\frac{x}{m}}}{b^{\frac{y}{m}}}.$$

Que représente une puissance marquée par un exposant fractionnaire?

Que désigne le numérateur de l'exposant?

Qu'indique le dénominateur de l'exposant?

Que représente une quantité affectée d'un exposant fractionnaire négatif?

Exprimez les quantités suivantes en remplaçant le signe radical par un exposant fractionnaire et en faisant disparaître les exposants négatifs.

(1) C'est Newton qui, le premier, fit usage d'exposants fractionnaires. — Les quantités affectées d'exposants fractionnaires et celles qui n'ont que des exposants entiers, positifs ou négatifs, constituent en réalité des fonctions fort différentes. Les premières, par leur nature, appartiennent au chapitre suivant. Cependant il y a quelque avantage à trouver réuni dans un même chapitre tout ce qui concerne les exposants. En adoptant cet ordre des matières, nous avons suivi l'exemple de plusieurs excellents auteurs anglais. Le professeur qui adoptera un autre ordre dans son cours saura où trouver les exercices relatifs à chaque sujet; c'est là l'essentiel.

1. $\sqrt{a^3}$. 2. $\sqrt{a^5}$. 3. $(\sqrt{a})^6$. 4. $\sqrt{m}$. 5. $\sqrt[3]{n}$. 6. $\sqrt[3]{n^5}$.

7. $\sqrt[4]{x^3}$. 8. $\sqrt[7]{a^5}$. 9. $(\sqrt[4]{a})^5$. 10. $\sqrt{a^3b}$. 11. $\sqrt[8]{a^3b^2}$. 12. $\sqrt[3]{ab^5}$.

13. $\sqrt[7]{mn^3}$. 14. $\sqrt[2]{p^{a-b}}$. 15. $\sqrt[3]{(x-y)^m}$. 16. $\sqrt[2]{a^2-b^2}$.

17. $\sqrt[3]{3ay^9}$. 18. $\sqrt[5]{a-5}$. 19. $\sqrt[3]{(a+b)^{m+3}}$.

20. $\sqrt[3]{a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}$. 21. $\sqrt[2]{m^2-2mp+p^2}$.

22. $\sqrt[3]{(a^6-b^3)^2(a-b)^6}$. 23. $\sqrt{a^{-1}}$. 24. $\sqrt[3]{a^{-2}}$.

25. $\sqrt[m]{a^{-n}}$. 26. $\sqrt[p]{m^{-1}n^{-2}}$. 27. $\sqrt[-p]{a^m}$. 28. $\sqrt[-p]{m^{-n}}$.

29. $\sqrt[n]{(a+b)^{n-1}}$. 30. $\sqrt[p]{(x-y)^{1-2p}}$. 31. $\sqrt[3]{27a^{-2}b^4}$. 32. $\sqrt{a^{-1}b}$.

33. $\sqrt{\frac{m}{n}}$. 34. $\sqrt[3]{\frac{m^5}{n^4}}$. 35. $\sqrt[m]{\frac{x}{y^2}}$. 36. $\sqrt[p]{\frac{a^{-1}}{b^{-3}}}$. 37. $\sqrt[4]{\frac{a^6}{b^8}}$.

38. $\sqrt[m]{\frac{1}{x}}$. 39. $\sqrt{a}\sqrt[3]{x^2}$. 40. $\sqrt[4]{a^5}\sqrt[5]{d^4}$. 41. $\sqrt[3]{x^{\frac{5}{7}}}$. 42. $\sqrt{m^{\frac{2}{3}}}$.

43. $\sqrt[3]{\sqrt{a^5}}$. 44. $\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^7}}$. 45. $\sqrt[b]{\sqrt[a]{a^m}}$. 46. $\sqrt[\frac{1}{2}]{a}$. 47. $\sqrt[\frac{2}{8}]{m}$.

48. $\sqrt[\frac{5}{6}]{17}$. 49. $\sqrt[\frac{1}{3}]{c^4}$. 50. $\sqrt[\frac{2}{5}]{x^7}\sqrt[\frac{3}{4}]{y^5}$. 51. $\sqrt[\frac{3}{4}]{x^{\frac{3}{4}}}\sqrt[\frac{1}{2}]{y^{\frac{1}{2}}}$.

52. $\sqrt[0,3]{b^2}$. 53. $\sqrt[0,7]{c^4}$. 54. $\sqrt[0,75]{d^5}$. 55. $\sqrt[0,6]{e^{\frac{1}{10}}}$. 56. $\sqrt[0,9]{x^{\frac{3}{10}}}$.

Ecrire les quantités suivantes en n'employant que des exposants entiers et positifs.

57. $a^{\frac{1}{3}}$. 58. $1^{\frac{2}{5}}$. 59. $m^{\frac{3}{4}}$. 60. $x^{\frac{3}{7}}$. 61. $n^{\frac{2}{3}}$.

62. $b^{\frac{3}{4}}$. 63. $e^{\frac{5}{6}}$. 64. $h^{\frac{1}{9}}$. 65. $i^{\frac{7}{8}}$. 66. $l^{\frac{1}{7}}$.

67. $x^{\frac{a}{b}}$. 68. $y^{\frac{1}{m}}$. 69. $d^{\frac{p}{q}}$. 70. $g^{\frac{h+1}{m}}$. 71. $k^{\frac{i+2}{n}}$.

72. $b^{\frac{m}{2n}}$. 73. $a^{\frac{1-m}{1+n}}$. 74. $c^{\frac{m+2}{m+1}}$. 75. $a^{-\frac{1}{3}}$. 76. $c^{-\frac{3}{4}}$.

77. $e^{-\frac{m}{n}}$. **78.** $x^{-\frac{2m}{3}}$. **79.** $y^{-\frac{a+b}{m+1}}$. **80.** $z^{p-\frac{1}{3}}$. **81.** $u^{m-\frac{n}{p}}$.

82. $(a^2-b^2)^{\frac{1}{2}}$. **83.** $(x^3+y^3)^{\frac{2}{3}}$. **84.** $m^{\frac{2}{3}}n^{\frac{3}{4}}$. **85.** $x^{\frac{5}{2}}y^{\frac{3}{2}}$.

86. $(m^3-n^3)^{-\frac{1}{3}}$. **87.** $\left(\frac{a^{-1}}{b^{-2}}\right)^{-\frac{1}{2}}$. **88.** $\left(\frac{m^5}{n^4}\right)^{\frac{2}{5}}$. **89.** $\left(\frac{x^{-3}}{y^{-4}}\right)^{-\frac{5}{7}}$.

90. $\left(\frac{u^{-\frac{1}{4}}}{v^{-\frac{2}{5}}}\right)^{-\frac{3}{4}}$. **91.** $\left(\frac{a^{-\frac{m}{n}}}{b^{-\frac{c}{n}}}\right)^{m-\frac{2}{5}}$. **92.** $\left(\frac{m^{-\frac{1}{4}}}{n^{-\frac{2}{5}}}\right)^{\frac{x}{y}-\frac{3}{4}}$. **93.** $\left(\frac{a^2}{b^{-2}}\right)^{-1\frac{1}{2}}$.

94. $\left(\frac{1^{-5}}{x^{-\frac{3}{7}}}\right)^{n-\frac{p}{q}}$. **95.** $\left(p^{-\frac{m}{2}}\right)^{\frac{2n}{3r}}$. **96.** $(u^{-x})^{-0,7}$. **97.** $(v^3x^{-a})^{-\frac{m}{n}}$.

98. $\left(a^{-\frac{n}{p}}\right)^{-0,9}$. **99.** $\left(\frac{1^{-a}}{b^{-\frac{2a}{3}}}\right)^{-0,75}$. **100.** $\left(\frac{c^{-\frac{3}{a}}}{d^{-\frac{a}{3}}}\right)^{-0,15}$.

Calculez la valeur numérique des quantités suivantes.

101. $4^{\frac{1}{2}}$. **102.** $27^{\frac{1}{3}}$. **103.** $625^{\frac{1}{4}}$. **104.** $16^{\frac{1}{4}}$. **105.** $9^{\frac{1}{2}}$.

106. $64^{\frac{1}{6}}$. **107.** $3125^{\frac{1}{5}}$. **108.** $216^{\frac{1}{3}}$. **109.** $49^{\frac{1}{2}}$. **110.** $729^{\frac{1}{3}}$.

111. $16^{\frac{5}{4}}$. **112.** $81^{\frac{3}{2}}$. **113.** $125^{\frac{5}{3}}$. **114.** $32^{\frac{4}{5}}$. **115.** $81^{\frac{5}{4}}$.

116. $256^{\frac{3}{4}}$. **117.** $512^{\frac{2}{3}}$. **118.** $128^{\frac{4}{7}}$. **119.** $16^{-\frac{3}{4}}$. **120.** $64^{-\frac{2}{3}}$.

121. $1024^{-\frac{3}{5}}$. **122.** $64^{-\frac{5}{6}}$. **123.** $512^{-\frac{1}{3}}$. **124.** $81^{-\frac{1}{2}}$. **125.** $625^{-\frac{3}{4}}$.

126. $\left(\frac{25}{36}\right)^{\frac{1}{2}}$. **127.** $\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{3}}$. **128.** $\left(\frac{625}{1296}\right)^{\frac{1}{4}}$. **129.** $\left(\frac{32}{243}\right)^{\frac{1}{5}}$.

130. $\left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{6}}$. **131.** $\left(\frac{25}{36}\right)^{-\frac{1}{2}}$. **132.** $\left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}$. **133.** $\left(\frac{625}{1296}\right)^{-\frac{1}{4}}$.

134. $\left(\frac{32}{243}\right)^{-\frac{1}{5}}$. **135.** $\left(\frac{1}{64}\right)^{-\frac{1}{6}}$. **136.** $(3\frac{3}{8})^{-\frac{2}{3}}$. **137.** $(6\frac{1}{4})^{-\frac{1}{2}}$.

138. $(7\frac{19}{32})^{\frac{3}{5}}$. **139.** $(7\frac{19}{32})^{-\frac{3}{5}}$. **140.** $(0,25)^{\frac{1}{2}}$. **141.** $(0,027)^{\frac{2}{3}}$.

142. $(0,125)^{-\frac{1}{3}}$. **143.** $(-0,027)^{\frac{2}{3}}$. **144.** $(-0,00032)^{\frac{3}{5}}$.

145. $(0{,}81)^{-\frac{1}{2}}$. **146.** $(0{,}64)^{0{,}5}$. **147.** $(0{,}0256)^{0{,}25}$.

148. $(0{,}00243)^{0{,}2}$. **149.** $1024^{0{,}6}$. **150.** $81^{0{,}75}$.

XIII

1. Addition et soustraction avec exposants négatifs ou fractionnaires.

Qu'entend-on par quantités semblables?

Suffit-il, pour que deux quantités soient semblables, qu'elles aient les mêmes exposants accompagnant respectivement les mêmes lettres?

Additionnez :

1. $a^{\frac{2}{3}};\ 3a^{\frac{2}{3}}$. **2.** $\frac{1}{2}b^{\frac{3}{4}};\ 4b^{-\frac{3}{4}}$. **3.** $5m^{\frac{2}{3}};\ -10m^{-\frac{2}{3}}$. **4.** $5x^{-3};\ 4x^{-3}$.

5. $0{,}5m^{-\frac{1}{2}};\ 0{,}31m^{-\frac{1}{2}}$. **6.** $4c^{-\frac{3}{5}};\ -0{,}6c^{-\frac{3}{5}};\ -3c^{-\frac{3}{5}}$.

7. $d^{-4};\ 3d^{-4};\ -5{,}3d^{-4}$.

8. $a^{-1}+3a^{-1}b^{-\frac{1}{3}}-0{,}5a^{-2}b^{-\frac{2}{3}}+0{,}5;\ 2a^{-1}-0{,}8a^{-1}b^{-\frac{1}{3}}+0{,}5a^{-2}b^{-\frac{2}{3}};\ -0{,}4a^{-1}+2a^{-2}b^{-\frac{2}{3}}-4$.

9. $x^{-2}-x^{-3}y^{\frac{1}{2}}-3x^{-4}y^{\frac{1}{3}};\ 2x^{-3}y^{\frac{1}{2}}-2x^{-2}+5x^{-4}y^{\frac{1}{3}};\ -x^{-4}y^{\frac{1}{3}}+x^{-2}-3x^{-3}y^{\frac{1}{2}}$.

10. $a^{-1}+b^{-4}-3a^{-2}b^{-3}-5b^{-5};\ -2b^{-4}+6b^{-5}+4a^{-2}b^{-3}-2a^{-1};\ 3b^{-4}-2a^{-1}+a^{-2}b^{-3}+2b^{-5}$.

11. $x^{-\frac{4}{5}}-2ax^{-\frac{3}{5}}+2bx^{-\frac{2}{5}};\ 3ax^{-\frac{3}{5}}-mx^{-\frac{4}{5}}-cx^{-\frac{2}{5}};\ bx^{-\frac{2}{5}}+dx^{-\frac{3}{5}}-2x^{-\frac{4}{5}}$.

12. $y^{-\frac{1}{2}}+by^{-\frac{3}{2}}-cy^{\frac{3}{2}};\ 4y^{-\frac{1}{2}}-cy^{-\frac{3}{2}}+2y^{\frac{3}{2}};\ my^{-\frac{3}{2}}-2y^{-\frac{1}{2}};\ 4by^{-\frac{3}{2}}-my^{-\frac{1}{2}};\ -y^{-\frac{1}{2}}+y^{\frac{3}{2}}$.

Du premier monome ou polynome, soustrayez les suivants :

13. $b^{-\frac{1}{2}}$; $2b^{-\frac{1}{2}}$; $ab^{-\frac{1}{2}}$.

14. $d^{-\frac{3}{4}}$; $4d^{-\frac{3}{4}}$; $0{,}7d^{-\frac{3}{4}}$.

15. e^{-x}; $-2e^{-x}$; $2{,}5e^{-x}$.

16. $0{,}8h^{-4}$; $-0{,}05h^{-4}$; $2h^{-4}$.

17. $-2{,}3m^{-5}$; $0{,}7m^{-5}$; $-7m^{-5}$.

18. $\frac{1}{2}p^{-3}$; $0{,}7p^{-3}$; $-1\frac{1}{2}p^{-3}$.

19. $3x^{-1} - 2x^{-2} + 0{,}5x^{-3}$; $4x^{-2} + 2x^{-1} - \frac{3}{5}x^{-3}$; $0{,}7x^{-2} - 0{,}4x^{-1} + 2x^{-3}$; $-x^{-3} - x^{-1} + x^{-2}$.

20. $\frac{2}{5}a^{\frac{1}{3}} - \frac{3}{4}b^{-\frac{1}{2}} - 0{,}7c^{-\frac{2}{3}}$; $\frac{4}{5}b^{-\frac{1}{2}} - 2c^{-\frac{2}{3}} + 3a^{\frac{1}{3}}$; $2b^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{7}a^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{2}c^{-\frac{2}{3}}$; $b^{-\frac{1}{2}} - 2c^{-\frac{2}{3}} - 3a^{\frac{1}{3}}$.

21. $m^{-1}n^{-\frac{1}{4}} - 3m^{-2}n^{-\frac{3}{4}} + 2m^{-3}n^{-\frac{5}{4}}$; $0{,}7m^{-1}n^{-\frac{1}{4}} - 5m^{-2}n^{-\frac{3}{4}} + m^{-3}n^{-\frac{5}{4}}$; $\frac{2}{3}m^{-3}n^{-\frac{5}{4}} - 2m^{-1}n^{-\frac{1}{4}}$.

22. $h^{-1} - 2h^{-2}x + 3h^{-3}x^2$; $2h^{-1} - 3h^{-2}x - 0{,}6h^{-3}x^2$; $-4h^{-1} + h^{-2}x - 3$; $\frac{2}{3}h^{-3}x^2 - 0{,}5h^{-1} + 1\frac{1}{2}$.

23. $x^{-\frac{4}{5}} - 3x^{-1}y^{-\frac{2}{3}} - 1$; $4 - 2x^{-\frac{4}{5}} + 0{,}3x^{-1}y^{-\frac{2}{3}}$; $3n^{-\frac{1}{2}} - 1^1/_3 + 2x^{-\frac{4}{5}}$; $x^{-1}y^{-\frac{2}{3}} + 0{,}5 + n^{-\frac{1}{2}}$.

24. $z^{-\frac{2}{3}} - 3z^{-\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{2}} + 2$; $4z^{-\frac{2}{3}} - 3$; $2z^{-\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{2}} - 4z^{-\frac{2}{3}}$; $0{,}5 - 2v^{-\frac{1}{2}}$; $\frac{1}{2}(z^{-\frac{2}{3}} - 4v^{-\frac{1}{2}} + 2)$.

XIV

2. Multiplication de quantités affectées d'exposants fractionnaires.

$$a^{\frac{1}{6}}.\ a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{6}+\frac{1}{2}} = a^{\frac{2}{3}}. \qquad a^{-\frac{m}{n}}.\ a^{\frac{p}{n}} = a^{\frac{p-m}{n}}.$$

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{x}{b}} = a^{\frac{mx}{bn}}.$$

Dans la multiplication, les règles relatives aux exposants entiers s'appliquent-elles aux exposants fractionnaires ?

Effectuez les multiplications suivantes :

1. $a^{\frac{1}{5}}.\ a^{\frac{3}{5}}$. **2.** $b^{-\frac{2}{3}}.\ b^{\frac{3}{4}}$. **3.** $a^{-\frac{1}{3}}.\ a^{-\frac{2}{5}}$. **4.** $c^{-\frac{1}{5}}.\ c^{-\frac{3}{10}}$.

5. $d^{-\frac{4}{5}}.\ d^{-1}$. **6.** $m^{-\frac{2}{3}}.\ m^{-\frac{1}{3}}$. **7.** $m^{-\frac{4}{7}}.\ m^{\frac{2}{7}}$ **8.** $x^{-\frac{1}{m}}.\ x^{\frac{1}{n}}$.

9. $x^{\frac{m}{n}}.\ x^{\frac{p}{q}}$. **10.** $y^{-\frac{a}{c}}.\ y^{-\frac{m}{n}}$. **11.** $1^{-\frac{1}{m}}.\ a^{-\frac{x}{y}}$. **12.** $z^{-\frac{c}{m}}.z^{-0}$.

13. $u^{-1}.\ u^{\frac{3}{4}}$. **14.** $d^{-\frac{2}{m}}.\ d^{-\frac{n}{2m}}$. **15.** $e^{-2x}.\ e^{-\frac{x}{y}}$. **16.** $(a^{\frac{2}{3}})^{\frac{6}{10}}$.

17. $(b^{\frac{1}{2}})^{\frac{4}{5}}$. **18.** $(h^{\frac{2}{5}})^{\frac{5}{6}}$. **19.** $(m^{\frac{1}{x}})^{\frac{a}{b}}$. **20.** $(n^{-\frac{a}{b}})^{\frac{c}{d}}$.

21. $(x^{\frac{p}{2}} - x^{\frac{p}{4}}y^{\frac{q}{4}} + y^{\frac{q}{2}}) \times (x^{\frac{p}{2}} + x^{\frac{p}{4}}y^{\frac{q}{4}} + y^{\frac{q}{2}})$.

22. $(x^{\frac{r}{2}} + 2x^{\frac{r}{4}}y^{p} + 3y^{2p}) \times (x^{\frac{r}{2}} - 2x^{\frac{r}{4}}y^{p} + 3y^{2p})$.

23. $(x^{-1} + x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}} + y^{-1}) \times (x^{-1} - x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}} + y^{-1})$.

24. $(2a^{-\frac{5}{4}} - 3a^{-\frac{3}{4}} + a^{-\frac{1}{4}} - 2) \times (a^{-\frac{3}{4}} - 2a^{-\frac{1}{4}} + 3)$.

25. $(\frac{1}{2}m^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}m^{-\frac{1}{3}} + \frac{1}{4}m^{-\frac{1}{4}} - \frac{1}{5}) \times (2m^{-\frac{1}{3}} - m^{-\frac{1}{4}} + \frac{3}{4})$.

26. $(a^{\frac{4}{5}} - 3a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{1}{2}} + 4a^{\frac{2}{5}}b - a^{\frac{1}{5}}b^{\frac{3}{2}}) \times (a^{\frac{2}{5}} - 2a^{\frac{1}{5}}b^{\frac{1}{2}} - b)$.

27. $(a^{\frac{3}{p}} - 2a^{\frac{2}{p}} + 3a^{\frac{1}{p}}) \times (2a^{\frac{2}{p}} - a^{\frac{1}{p}} + 2)$.

28. $(c^{-\frac{4}{m}} - 3c^{-\frac{3}{m}} + 5c^{-\frac{2}{m}} - c^{-\frac{1}{m}}) \times (c^{-\frac{3}{m}} - 2c^{-\frac{2}{m}} - c^{-\frac{1}{m}})$.

29. $(\frac{1}{2}d^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{3}d^{-\frac{2}{x}} - \frac{1}{4}d^{-\frac{3}{x}} + \frac{1}{5}d^{-\frac{4}{x}}) \times (2d^{-\frac{1}{x}} -$
$3d^{-\frac{2}{x}} + 4d^{-\frac{3}{x}})$.

30. $(h^{-\frac{a}{b}} - 2gh^{-\frac{2a}{b}} - h^{-\frac{3a}{b}}) \times (2h^{-\frac{a}{b}} - mh^{-\frac{2a}{b}} + h^{-\frac{3a}{b}})$.

31. $(x^{\frac{2}{p}} - (a + b)x^{\frac{1}{p}} + ab) \times (x^{\frac{1}{p}} - c)$.

32. $(y^{\frac{3}{m}} - ay^{\frac{2}{m}} + 3by^{\frac{1}{m}} - c) \times (y^{\frac{2}{m}} + by^{\frac{1}{m}} - cy^0)$.

33. $\left(\frac{a}{x^{-\frac{4}{5}}} - \frac{3a}{x^{-\frac{3}{5}}} + \frac{2a}{x^{-\frac{2}{5}}} - \frac{a}{x^{-\frac{1}{5}}}\right) \times \left(\frac{b}{x^{-\frac{3}{5}}} - \frac{2b}{x^{-\frac{2}{5}}} + \frac{1}{x^{-\frac{1}{5}}}\right)$.

34. $\left(\frac{m^{-\frac{1}{5}}}{n^{-\frac{3}{4}}} - \frac{m^{-\frac{2}{5}}}{n^{-\frac{1}{2}}} + \frac{m^{-\frac{3}{5}}}{n^{-\frac{1}{4}}}\right) \times \left(\frac{2m^{-\frac{1}{5}}}{n^{-\frac{1}{2}}} - \frac{3m^{-\frac{2}{5}}}{n^{-\frac{1}{4}}}\right)$.

35. $\left(\frac{5x^{-\frac{5}{6}}}{4y^{-\frac{2}{3}}} + \frac{3a^{-\frac{1}{2}}}{2b^{-\frac{2}{5}}}\right) \times \left(\frac{5x^{-\frac{5}{6}}}{4y^{-\frac{2}{3}}} - \frac{3a^{-\frac{1}{2}}}{2b^{-\frac{2}{5}}}\right)$.

36. $(2a^{-1}b^{-\frac{2}{3}} - 3a^{-\frac{3}{5}}b^{-\frac{4}{5}})^2$.

XV

3. Division de quantités affectées d'exposants fractionnaires.

$$a^{-\frac{m}{n}} : a^{-\frac{x}{y}} = a^{\frac{x}{y}-\frac{m}{n}} \qquad a^{-\frac{m}{n}} : a^{\frac{x}{y}} = a^{-\left(\frac{m}{n}+\frac{x}{y}\right)}$$

$$a^{\frac{m}{n}} : a^{-\frac{x}{y}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{x}{y}}.$$

Effectuez les divisions suivantes :

1. $e^{-\frac{1}{2}} : e^{-\frac{1}{4}}$. 2. $h^{-\frac{2}{3}} : h^{-\frac{1}{3}}$. 3. $k^{-\frac{3}{4}} : k^{-\frac{1}{4}}$. 4. $l^{-\frac{3}{5}} : l^{-\frac{4}{5}}$.

5. $g^{-\frac{2}{3}} : g^{-\frac{3}{4}}$. 6. $a^{\frac{2}{5}} : a^{-\frac{1}{2}}$. 7. $b^{-\frac{3}{7}} : b^{\frac{2}{3}}$. 8. $m^{-\frac{1}{4}} : m^{-\frac{1}{5}}$

9. $p^{-\frac{1}{m}} : p^{\frac{1}{n}}$. 10. $q^{\frac{1}{a}} : q^{-\frac{1}{b}}$. 11. $t^{-\frac{m}{n}} : t^{-\frac{1}{a}}$. 12. $v^{-\frac{1}{p}} : v^{\frac{a}{b}}$.

13. $x^{-\frac{m}{n}} : x^{-\frac{a}{b}}$. 14. $z^{-a} : z^{\frac{p}{q}}$. 15. $y^{-1} : y^{-\frac{m}{n}}$. 16. $c^{-\frac{2}{m}} : c^{-\frac{a}{m}}$.

17. $d^{-\frac{a}{m}} : d^{-\frac{b}{2m}}$. 18. $e^{\frac{m}{n}} : e^{-\frac{1}{a}}$. 19. $ab^{-\frac{p}{q}} : a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{2p}{q}}$.

20. $\frac{1}{a^{-\frac{1}{2}}} : \frac{3b^{-\frac{2}{3}}}{a^{-\frac{3}{4}}}$. 21. $(x^{\frac{3}{2}} - xy^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}y - y^{\frac{3}{2}}) : (x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}.)$

22. $(x^{\frac52} - x^2 - 4y^{\frac32} + 6x - 2x^{\frac12}) : (x^{\frac32} - 4x^{\frac12} + 2)$.

23. $(\frac15 x^{\frac{8}{15}} - \frac{3}{10}x^{\frac{7}{10}} + \frac12 x^{\frac34} - \frac13 x^{\frac{7}{12}} - \frac{3}{20}x^{\frac{9}{20}} + \frac14 x^{\frac12}) : (x^{\frac14} - \frac35 x^{\frac15})$.

24. $(\frac{1}{10}a^{\frac{7}{10}} - \frac{1}{15}a^{\frac{8}{15}} + \frac{1}{20}a^{\frac{9}{20}} - \frac{1}{12}a^{\frac23} + \frac{1}{18}a^{\frac12} - \frac{1}{24}a^{\frac{5}{12}}) :$
$(\frac15 a^{\frac15} - \frac16 a^{\frac16})$.

25. $(\frac25 x^{\frac{8}{15}} + \frac12 x^{\frac12} - \frac23 x^{\frac{7}{12}} - \frac35 x^{\frac{7}{10}} + x^{\frac34} - \frac{3}{10}x^{\frac{9}{20}}) : (x^{\frac14} - \frac35 x^{\frac15})$.

26. $(x + y + z - 3x^{\frac13}y^{\frac13}z^{\frac13}) : (x^{\frac13} + y^{\frac13} + z^{\frac13})$.

27. $(x - 1) : (x^{\frac15} - 1)$. 28. $(y - 1) : (y^{\frac16} - 1)$.

29. $(x^{\frac12} + y^{\frac12} + z^{\frac12} + x^{\frac16}y^{\frac13} + x^{\frac16}z^{\frac13} + x^{\frac13}y^{\frac16} + x^{\frac13}z^{\frac16} +$
$y^{\frac13}z^{\frac16} + y^{\frac16}z^{\frac13}) : (x^{\frac16} + y^{\frac16} + z^{\frac16})$.

30. $(a^{\frac{7}{10}} - a^{\frac{8}{15}} + a^{\frac{9}{20}} + a^{\frac23} - a^{\frac12} + a^{\frac{5}{12}} - a^{\frac38} + a^{\frac{11}{24}} - a^{\frac58}) :$
$(a^{\frac12} - a^{\frac13} + a^{\frac14})$.

31. $(m^{-\frac75} - 4m^{-1} + 12m^{-\frac25} - 17m^{-\frac35} + 16m^{-\frac45}) :$
$(m^{-\frac35} - 2m^{-\frac25} + 3m^{-\frac15})$.

32. $(2x^{\frac15}y^{\frac15} + y^{\frac25} + 2x^{\frac15}z^{\frac15} + x^{\frac25} + 2y^{\frac15}z^{\frac15} + z^{\frac25}) :$
$(x^{\frac15} + y^{\frac15} + z^{\frac15})$.

33. $(a^{\frac12} - b^{\frac12} - c^{\frac12} + 2b^{\frac14}c^{\frac14}) : (a^{\frac14} + b^{\frac14} - c^{\frac14})$.

34. $[m^{-\frac35} + 2m^{-\frac15}n^{-\frac15}(n^{-\frac15} - m^{-\frac15}) + 3m^{-\frac15}p^{-\frac15}(m^{-\frac15} - p^{-\frac15}) +$
$6n^{-\frac15}p^{-\frac15}(n^{-\frac15} + p^{-\frac15}) - 4n^{-\frac35} - 9p^{-\frac35}] :$
$(m^{-\frac15} - 2n^{-\frac15} + 3p^{-\frac15})$.

35. $\left(\frac{a^{-1}}{b^{-\frac23}} + \frac{4a^{-\frac52}}{b^{-\frac53}} + \frac{3a^{-3}}{b^{-2}}\right) : \left(\frac{a^{-\frac12}}{b^{-\frac13}} - \frac{2a^{-1}}{b^{-\frac23}} + \frac{3a^{-\frac32}}{b^{-1}}\right)$.

36. $\left(\frac{m}{n} - 4\frac{m^{\frac53}}{n^{\frac53}} + 12\frac{m^2}{n^2} - 9\frac{m^{\frac73}}{n^{\frac73}}\right) : \left(\frac{m^{\frac13}}{n^{\frac23}} + \frac{2m^{\frac23}}{n} - \frac{3m}{n^{\frac43}}\right)$.

XVI

4. Élévation aux puissances de quantités composées.

Tableau des coefficients qui affectent les termes des puissances d'un binome [1].

Puissances	
0	 1
1	. . . . 1 1
2	. . . . 1 2 1
3	. . . . 1 3 3 1
4	. . . . 1 4 6 4 1
5	. . . . . . 1 5 10 10 5 1
6	. . . . . 1 6 15 20 15 6 1
7	. . . . 1 7 21 35 35 21 7 1
8	. . . 1 8 28 56 70 56 28 8 1
9	. . 1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
10	. 1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
11	1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6.$$

$$(a-b)^6 = a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6.$$

$$(a+b+c+d+e)^2 = a^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2ae + b^2 + 2bc + 2bd + 2be + c^2 + 2cd + 2ce + d^2 + 2de.$$

---

(1) Cette table se trouve déjà dans le *Traité des nombres* de *Niccolo Tartaglia* (1500-1559), qui donne la règle pour former un coefficient au moyen des deux qui lui correspondent dans la rangée supérieure. Il est facile de voir comment on procède pour cela. On nomme souvent cette table *triangle arithmétique de Pascal*, parce que ce géomètre, qui la fit connaître en 1654, y fut conduit de son côté par des problèmes sur les jeux de hasard.

Calculez par la voie ordinaire $(a + b)^3$; $(a + b)^4$; $(a + b)^5$; $(a - b)^6$; $(a - b)^7$.

D'après quelle loi se forment les coefficients des diverses puissances ?

Comment se forment les termes d'une puissance de $a + b$?

En quoi diffèrent les puissances de $a - b$ des puissances de $a + b$?

Écrivez immédiatement, au moyen de la table et de la formule ci-dessus, le développement des puissances suivantes :

1. $(a + b)^3$. **2.** $(m + n)^5$. **3.** $(c + d)^8$. **4.** $(h + l)^{10}$.
5. $(x + y)^{11}$. **6.** $(y - z)^7$. **7.** $(x - a)^9$. **8.** $(y - b)^3$.
9. $(c - d)^5$. **10.** $(m - a)^8$. **11.** $(1 + a)^4$. **12.** $(a - 1)^4$.
13. $(1 + d)^6$. **14.** $(1 - h)^8$. **15.** $(1 + x)^{10}$. **16.** $(2 + a)^5$.
17. $(3 - a)^6$. **18.** $(m - 2)^9$. **19.** $(x - 5)^3$. **20.** $(y - 3)^5$.
21. $(a^3 + b^2)^7$. **22.** $(m^5 - n^2)^8$. **23.** $(x^3 + y^4)^5$. **24.** $(a^4 - y^3)^8$.
25. $(a - b^2)^7$. **26.** $\left(\frac{a}{b} + \frac{x}{y}\right)^2$. **27.** $\left(\frac{a}{c} - \frac{d}{x}\right)^3$. **28.** $\left(\frac{m}{n} + \frac{p}{q}\right)^5$.
29. $\left(\frac{m}{p} - \frac{n}{p}\right)^6$. **30.** $\left(\frac{1}{a} - \frac{b}{c}\right)^4$. **31.** $(m^{\frac{2}{3}} - n^{\frac{1}{2}})^5$. **32.** $(a^{\frac{3}{4}} + b^{\frac{2}{3}})^6$.
33. $(x^{\frac{2}{5}} + y^{\frac{1}{4}})^7$. **34.** $(x^{\frac{1}{2}} - z^{\frac{1}{3}})^4$. **35.** $(a^{\frac{1}{5}} + b^{\frac{2}{5}})^5$.
36. $(a^{-1} + b^{-2})^5$. **37.** $(a^{-3} + x^{-1})^8$. **38.** $(m^{-4} - n^{-1})^7$.
39. $(d^{-2} - x^2)^6$. **40.** $(c^{-5} + z)^4$. **41.** $(m^{-\frac{1}{2}} + n^{-\frac{2}{3}})^5$.
42. $(n^{-\frac{3}{4}} + p^{-\frac{2}{3}})^5$. **43.** $(n^{-\frac{2}{5}} - p^{-\frac{3}{5}})^4$. **44.** $(a^{-\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{3}})^5$.
45. $(x^{-\frac{1}{4}} + y)^3$. **46.** $(y^{-2} - z^{-\frac{2}{3}})^6$ **47.** $(u^{-\frac{2}{5}} + v^3)^4$.
48. $(1^{-2} - z^{-\frac{2}{3}})^5$. **49.** $(2x + y)^4$. **50.** $(3y - z)^5$.
51. $(4z - u)^6$. **52.** $(2a - b^2)^7$. **53.** $(m^2 + 3b)^6$.
54. $(a - 2c)^5$. **55.** $(x^3 - 3d)^4$. **56.** $(u^{-\frac{2}{3}} - 4e)^3$
57. $(2a^2 - 3b)^7$. **58.** $(3x^{-1} + 2y^{\frac{2}{3}})^6$. **59.** $(2x + 3z^{-\frac{1}{2}})^8$.

60. $\left(\frac{a}{2} - 1\frac{1}{2}d^{-1}\right)^5$. **61.** $(5m^{-2} + \frac{1}{5}n^{-1})^5$. **62.** $\left(\frac{2a}{b} - \frac{3c}{d}\right)^6$.

63. $\left(\frac{1}{2a} + \frac{3}{b}\right)^5$. **64.** $\left(\frac{2}{a^{-1}} + \frac{d^{-2}}{c^{-3}}\right)^4$. **65.** $\left(\frac{x}{2} - \frac{y^{\frac{1}{3}}}{3}\right)^7$.

66. $\left(\frac{a}{3b} + \frac{2m^{\frac{1}{3}}}{x}\right)^5$. **67.** $\left(1 - \frac{3y}{4}\right)^6$. **68.** $\left(\frac{3a}{b} - \frac{2a^2}{x}\right)^7$.

69. $(5m^x - \frac{1}{8}n^{2y})^4$. **70.** $(3b^{m+1} + 2d^{n-1})^5$. **71.** $(4x^{a-3} - 3y^{2-b})^4$.

72. $(5m^{2x-1} + \frac{3}{4}n^{y-2})^3$. **73.** $(2a^3b - \frac{5}{8}mb^3)^2$.

74. $(\frac{1}{4}a^mb^x - \frac{1}{3}a^{m+1}b^{x-1})^4$. **75.** $(2a^2b^m + \frac{1}{2}a^mb^2)^5$.

76. $(mn^2p^3 - 3m^2n^3p)^3$.

---

77. $(a^{-1} + b^{-\frac{1}{2}} + c^{-\frac{1}{3}})^2$. **78.** $(a^{-\frac{2}{3}} - b^{\frac{4}{3}} + c^{-\frac{1}{2}})^2$.

79. $(m^{\frac{1}{2}} - n^{\frac{1}{3}} + p^{\frac{1}{4}})^2$. **80.** $(2x^{\frac{1}{3}} + 3y^{\frac{1}{4}} + 4z^{\frac{1}{5}})^2$.

81. $(5a^{-\frac{2}{3}} - b^{-\frac{3}{4}} + 3c^{-\frac{2}{5}})^2$. **82.** $(2a^{-\frac{2}{3}} + 3d^{-\frac{1}{5}} - 5e^{-\frac{4}{5}})^2$.

83. $(7m^{-\frac{4}{5}} - 5n^{\frac{3}{2}} + q)^2$. **84.** $(8x^5 + 4y^{\frac{1}{5}} - 2z^{\frac{1}{7}})^2$.

85. $(3u^{-\frac{1}{2}} - 12u^{-\frac{1}{2}}v^{\frac{2}{5}} - 2v^{\frac{2}{5}})^2$. **86.** $(0{,}1a^{\frac{1}{4}} + 0{,}5b^{\frac{1}{2}} + 0{,}3c^{\frac{1}{7}})^2$.

87. $(0{,}7d^{\frac{3}{4}} - 0{,}8e^{\frac{2}{3}} + 0{,}6h^{\frac{1}{5}})^2$. **88.** $(1{,}5m^{\frac{2}{7}} + 0{,}4n^{-\frac{1}{2}} - 1{,}2p^{\frac{3}{5}})^2$.

89. $(1{,}1x^{\frac{1}{6}} + 1{,}5y^{\frac{1}{5}} - 2{,}5z^{\frac{1}{4}})^2$. **90.** $(0{,}6z^{\frac{2}{3}} - 0{,}8u + 0{,}5v^{\frac{4}{3}})^2$.

91. $(a^{\frac{1}{3}} - 0{,}7a^{\frac{2}{3}} + 3{,}5a)^2$. **92.** $(0{,}9b^{\frac{2}{5}} + 9c^{\frac{1}{5}} - 0{,}1d^{\frac{3}{5}})^2$.

93. $(0{,}4l^{\frac{1}{2}} - 0{,}5l + 0{,}8l^{\frac{3}{2}})^2$. **94.** $(3m^{\frac{3}{5}} + 0{,}4m^{\frac{2}{5}} - 0{,}6m^{\frac{1}{5}})^2$.

95. $(2a^{\frac{2}{3}} + 3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{5}} + 2b^{\frac{2}{5}})^2$. **96.** $(5a^{\frac{1}{4}}b - 7a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}} + 2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}})^2$.

97. $(4m^{\frac{1}{4}}n^{\frac{1}{3}} + 2m^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{4}} - 5m^{\frac{1}{2}}n^{\frac{1}{5}})^2$.

98. $(0{,}2x^{\frac{2}{3}} - 4x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{5}} - 0{,}5y^{\frac{2}{5}})^2$. **99.** $(0{,}6z^{\frac{2}{3}} + u^{\frac{1}{5}}z^{\frac{3}{4}} - 0{,}1u^{-\frac{2}{5}})^2$.

100. $(0{,}3a^{\frac{4}{5}}b^{\frac{1}{3}} - 0{,}5a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{2}{3}} + 0{,}2a^{\frac{2}{5}}b)^2$.

101. $(3a^{\frac{5}{7}} - 2a^{\frac{4}{7}}b^{\frac{1}{4}} + u^{\frac{3}{7}}b^{\frac{1}{2}} - 0{,}5a^{\frac{2}{7}}b^{\frac{3}{4}} + 0{,}2a^{\frac{1}{7}}b)^2$.

102. $(0{,}1m^{\frac{6}{5}} + 0{,}2mn^{\frac{1}{3}} - 0{,}3m^{\frac{4}{5}}n^{\frac{2}{3}} + 0{,}4m^{\frac{3}{5}}n - m^{\frac{2}{5}}n^{\frac{4}{3}})^2.$

103. $(4u^{\frac{7}{9}} - 2u^{\frac{2}{3}}v^{-4} + u^{\frac{5}{9}}v^{-3} - 0{,}5u^{\frac{4}{9}}v^{-2} + 2{,}5u^{\frac{1}{3}}v^{-1})^2.$

104. $(a^{\frac{1}{3}}b^2 - a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{9}{5}} + ab^{\frac{3}{5}} + 3a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{7}{5}} - 2a^{\frac{5}{3}}b^{\frac{6}{5}} + 4a^2b)^2.$

105. $\left(\frac{a^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{1}{2}}} - \frac{2a^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{1}{4}}} + \frac{a}{3b^{\frac{1}{8}}}\right)^2.$ **106.** $\left(\frac{m^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{1}{3}}} - \frac{2m}{n^{\frac{2}{3}}} + \frac{3m^{\frac{3}{2}}}{n}\right)^2.$

107. $\left(\frac{x^{\frac{5}{3}}}{a^{\frac{4}{5}}} - \frac{2x^{\frac{4}{3}}}{a} + \frac{3x}{a^{\frac{6}{5}}}\right)^2.$ **108.** $\left(\frac{4u^{\frac{3}{5}}}{x^{\frac{5}{7}}} - \frac{3v^{\frac{2}{5}}}{y^{\frac{6}{7}}} + \frac{2w^{\frac{1}{5}}}{z}\right)^2.$

109. $\left(\frac{2a^{-\frac{2}{3}}}{b^{-\frac{1}{2}}} + \frac{3a^{-\frac{2}{9}}}{b^{-1}} - \frac{4a^{-\frac{4}{9}}}{b^{-\frac{3}{2}}}\right)^2.$ **110.** $\left(\frac{1}{x^{-1}} + \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{b} - \frac{3b}{z^{-\frac{1}{2}}}\right)^2.$

111. $\left(\frac{m^{\frac{1}{3}}}{n^{\frac{1}{2}}} - \frac{2n^{\frac{1}{2}}}{p^{\frac{1}{4}}} + \frac{3p^{\frac{1}{4}}}{q^{\frac{1}{5}}} - \frac{2q^{\frac{1}{5}}}{v^{\frac{1}{6}}} + \frac{4v^{\frac{1}{6}}}{x^{\frac{1}{7}}}\right)^2.$

112. $\left(\frac{x^{-5}}{a^{\frac{1}{2}}} + \frac{2x^{-4}}{a^{\frac{1}{3}}} - \frac{3x^{-3}}{a^{\frac{1}{4}}} + \frac{4x^{-2}}{a^{\frac{1}{5}}} - \frac{5x^{-1}}{a^{\frac{1}{6}}}\right)^2.$

XVII

$$
\begin{aligned}
(a + b + c + d + e)^3 = {} & a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3 \\
& + 3a^2(b + c + d + e) \\
& + 3b^2(c + d + e) \\
& + 3c^2(d + e) + 3d^2e \\
& + 3a(b^2 + c^2 + d^2 + e^2) \\
& + 3b(c^2 + d^2 + e^2) \\
& + 3c(d^2 + e^2) + 3de^2 \\
& + 6ab(c + d + e) + 6ac(d + e) + \\
& 6ade + 6bc(d + e) + 6bde + 6cde.
\end{aligned}
$$

L'élève, après avoir étudié, dans la formule ci-dessus, la loi d'après laquelle se forment les termes, écrira immédiatement le développement des puissances suivantes :

1. $(m + n + p)^3$. **2.** $(x + y + z)^3$. **3.** $(a + b + c)^3$.
4. $(1 + m + n)^3$. **5.** $(x - y + z)^3$. **6.** $(c - 2d + e)^3$.

7. $(2a+3b-c)^3$. 8. $(4x+3y+2z)^3$. 9. $(5a-7b+2c)^3$.

10. $(10m-5n-2p)^3$. 11. $(4p^2-2r^3+5x)^3$.

12. $(a^{\frac{1}{2}}-2b^{\frac{1}{3}}+3c^{\frac{1}{4}})^3$. 13. $(2a^{\frac{2}{3}}-3b^{\frac{2}{5}}-4c^{\frac{1}{2}})^3$.

14. $(3m^{\frac{2}{5}}+5n^{\frac{1}{2}}-4p^{\frac{4}{3}})^3$. 15. $(b^{-1}-2c^{\frac{1}{4}}+3d^{-\frac{2}{3}})^3$.

16. $(3x^{-\frac{2}{5}}-8y^{-\frac{4}{7}}+5z^{-\frac{1}{2}})^3$. 17. $(2u^{\frac{3}{4}}+4v^{\frac{4}{5}}+8x^{\frac{5}{6}})^3$.

18. $(3b^{\frac{2}{5}}+5b^{\frac{4}{7}}-7b^{\frac{1}{2}})^3$. 19. $(a^{\frac{1}{4}}-2b^{\frac{1}{3}}+3c^{\frac{1}{2}}-4d^{\frac{1}{5}})^3$.

20. $(7x^{-2}-5y^{-3}+2z^{-4}-u^{-5})^3$.

21. $(2m^{-\frac{4}{5}}-n^{-\frac{3}{5}}+3p^{\frac{2}{5}}-q^{\frac{1}{5}})^3$.

22. $(2a^{-4}b^{-1}+3a^{-3}b^{-2}+2a^{-2}b^{-3}-a^{-1}b^{-4})^3$.

23. $(x^{\frac{4}{5}}y^{\frac{1}{3}}-2x^{\frac{3}{5}}y^{\frac{2}{3}}+3x^{\frac{2}{5}}y-2x^{\frac{1}{5}}y^{\frac{4}{3}})^3$.

24. $(x^{\frac{1}{9}}-2x^{\frac{2}{9}}+3x^{\frac{3}{9}}+4x^{\frac{4}{9}}-5x^{\frac{5}{9}}+6x^{\frac{6}{9}})^3$.

25. $\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{3}+\frac{z}{4}\right)^3$. 26. $\left(\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+\frac{c}{5}\right)^3$. 27. $\left(\frac{m}{4}-\frac{1}{5}+\frac{n}{2}\right)^3$.

28. $\left(\frac{2a}{m}+\frac{b}{n}-\frac{3c}{p}\right)^3$. 29. $\left(\frac{5a^2}{x}-\frac{3b^3}{y}+\frac{2c}{z}\right)^3$.

30. $\left(\frac{x}{2a}+\frac{y^2}{3b^3}-\frac{z^4}{5c}\right)^3$. 31. $\left(\frac{3a^2}{x^3}-\frac{5b^3}{x^2}+\frac{7b^4}{x}\right)^3$.

32. $\left(\frac{3a^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}}-\frac{2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{5}}}{3y^{\frac{1}{2}}}+\frac{2b^{\frac{2}{5}}}{z^{\frac{1}{3}}}\right)^3$. 33. $\left(\frac{2a^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{5}}}-\frac{b^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{5}}}{3a}-\frac{4a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{5}}}{b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{4}}}\right)^3$.

34. $\left(\frac{m^{\frac{2}{3}}}{x}-\frac{2mn}{px}-\frac{p^{\frac{2}{3}}}{m}\right)^3$. 35. $\left(\frac{3a^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{3}{2}}}+\frac{4x^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{4}}}-\frac{5a^{\frac{1}{2}}}{c^2}\right)^3$.

36. $\left(\frac{4a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}}{5x^{\frac{3}{2}}y}-\frac{5a^{\frac{1}{5}}x}{8by^4}-\frac{3a^8x^{\frac{3}{5}}}{4b^{\frac{1}{3}}y^7}\right)^3$. 37. $\left(\frac{2x^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{5}}}{a^3b}+\frac{3az^{\frac{2}{5}}}{b^2x^{\frac{1}{2}}}-\frac{5bz^{\frac{3}{5}}}{ax^{\frac{3}{2}}}\right)^3$.

38. $\left(\frac{7m^{\frac{3}{5}}y^{\frac{1}{5}}}{n^{\frac{2}{3}}z}+\frac{2n^{\frac{2}{3}}z}{m^{\frac{3}{5}}y^{\frac{1}{5}}}+\frac{3y^{\frac{2}{5}}z^4}{mn^{\frac{2}{3}}}\right)^3$. 39. $\left(\frac{5ax^{\frac{2}{5}}}{3m}-\frac{3bz^3}{a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{5}}}+\frac{a^{\frac{1}{2}}y}{2bx^{\frac{2}{5}}}\right)^3$.

40. $\left(\frac{2a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{7}}} - \frac{3b^{\frac{2}{5}}}{y^3} + \frac{5c^{\frac{3}{4}}}{z^2} - \frac{d^{\frac{4}{5}}}{u^{\frac{1}{2}}}\right)^3.$

41. $\left(\frac{2a^2b^{-\frac{1}{2}}}{cx^{-\frac{1}{3}}} + \frac{3c^{\frac{1}{4}}x^{-\frac{1}{3}}}{ab} - \frac{2d^3y^{-\frac{2}{3}}}{b^2c^{\frac{1}{4}}} + \frac{b^{-\frac{3}{2}}}{dy^{-\frac{2}{3}}}\right)^3.$

42. $\left(\frac{3a^{\frac{3}{5}}}{x^{\frac{4}{7}}} - \frac{4a^{\frac{2}{5}}b^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{1}{3}}} + \frac{5a^{\frac{1}{5}}b^{\frac{2}{3}}}{z^{\frac{1}{2}}} - \frac{2b^{\frac{3}{4}}}{u^{\frac{1}{5}}}\right)^3.$

43. $\left(\frac{a}{x^{\frac{6}{7}}} - \frac{2a^{\frac{4}{5}}}{x^{\frac{5}{7}}} + \frac{4a^{\frac{3}{5}}}{x^{\frac{4}{7}}} - \frac{3a^{\frac{2}{5}}}{x^{\frac{3}{7}}} + \frac{5a^{\frac{1}{5}}}{x^{\frac{2}{7}}} - \frac{2}{x^{\frac{1}{7}}}\right).$

CHAPITRE II

CALCUL DES RADICAUX. — RACINE CARRÉE; RACINE CUBIQUE.

XVIII

Tableau des huit premières puissances des nombres de 2 *à* 9.

Nombres	2e puis.	3e puis.	4e puis.	5e puis.	6e puis.	7e puis.	8e puis.
2	4	8	16	32	64	128	256
3	9	27	81	243	729	2187	6561
4	16	64	256	1024	4096	16384	65536
5	25	125	625	3125	15625	78125	390625
6	36	216	1296	7776	46656	279936	1679616
7	49	343	2401	16807	117649	823543	5764801
8	64	512	4096	32768	262144	2097152	16777216
9	81	729	6561	59049	531441	4782969	43046721

Effectuez les opérations suivantes, en utilisant au besoin la table ci-contre (1).

1. $\sqrt{4}$. **2.** $\sqrt{25}$. **3.** $\sqrt{9}$. **4.** $\sqrt{144}$. **5.** $\sqrt{400}$. **6.** $\sqrt{36}$.
7. $\sqrt[3]{27}$. **8.** $\sqrt[3]{1000}$. **9.** $\sqrt[3]{8000}$. **10.** $\sqrt[3]{1331}$. **11.** $\sqrt{625}$.
12. $\sqrt[4]{81}$. **13.** $\sqrt{0{,}16}$. **14.** $\sqrt[3]{0{,}000125}$. **15.** $3\sqrt{49}$.
16. $5\sqrt{25}$. **17.** $8\sqrt{16}$. **18.** $9\sqrt{9}$. **19.** $2\sqrt[3]{27}$. **20.** $5\sqrt{81}$.
21. $3\sqrt[4]{625}$. **22.** $\sqrt{\frac{4}{9}}$. **23.** $\sqrt[3]{\frac{125}{216}}$. **24.** $4\sqrt{\frac{81}{144}}$.
25. $12\sqrt{\frac{121}{144}}$. **26.** $\sqrt[3]{\frac{216}{343}}$. **27.** $\sqrt[6]{\frac{1}{729}}$. **28.** $\sqrt[4]{\frac{81}{625}}$.
29. $\sqrt{6\frac{1}{4}}$. **30.** $\sqrt{10\frac{6}{25}}$. **31.** $\sqrt[3]{42\frac{7}{8}}$. **32.** $5\sqrt[3]{18\frac{26}{27}}$.
33. $\sqrt[4]{150\frac{1}{16}}$. **34.** $\sqrt{16+9}$. **35.** $\sqrt{5+1\frac{1}{4}}$. **36.** $\sqrt{5-2\frac{3}{4}}$.
37. $\frac{1}{2}\sqrt[4]{4096}$. **38.** $\frac{4}{3}\sqrt[3]{216}$. **39.** $\frac{1}{5}\sqrt[4]{2560000}$. **40.** $0{,}2\sqrt[7]{\frac{1}{16384}}$.

I. TRANSFORMATION DES RADICAUX.

XIX

1. Introduction sous le radical du coefficient de ce dernier.

$$a = \sqrt[m]{a^m}. \qquad a\sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a^m}\sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a^m b}.$$

Faites entrer sous le radical le facteur qui le précède, et simplifiez.

1. $2\sqrt{2}$. **2.** $5\sqrt{7}$. **3.** $6\sqrt{5}$. **4.** $2\sqrt{21}$. **5.** $3\sqrt[3]{2}$. **6.** $7\sqrt[3]{3}$.
7. $8\sqrt[3]{5}$. **8.** $4\sqrt[4]{4}$. **9.** $2\sqrt[5]{3}$. **10.** $3\sqrt[7]{2}$. **11.** $10\sqrt[3]{4}$. **12.** $9\sqrt[3]{10}$.

(1) Les règles relatives au calcul des radicaux sont déjà exposées dans l'arithmétique d'*Alkalçadi* (†1477).—Les anciens mathématiciens indiquaient la racine par *radix*, ou bien simplement par l'initiale *R*. Cette dernière notation est encore employée par *Cardan* (1501-1576). Le signe $\sqrt{\ }$, qui n'est autre chose qu'un *r* un peu modifié, fut introduit par *Christoff Rudolff* (1525).

13. $8\sqrt{11}$. 14. $a\sqrt{5}$. 15. $x\sqrt[4]{2}$. 16. $y\sqrt[3]{6}$. 17. $z\sqrt[3]{7}$.

18. $(-b)\sqrt[4]{6}$. 19. $(-d)\sqrt[5]{7}$. 20. $-m\sqrt[4]{10}$. 21. $-n\sqrt[3]{15}$.

22. $-3\sqrt{a}$. 23. $-5\sqrt[3]{b}$. 24. $-2\sqrt[5]{x}$. 25. $-4\sqrt[4]{y}$.

26. $3\sqrt{bx}$. 27. $a\sqrt{b}$. 28. $m^2\sqrt{y^{-3}}$. 29. $n^3\sqrt[5]{xy^2}$.

30. $-a^3\sqrt[4]{m^2n}$. 31. $-x^2\sqrt[3]{y^4z}$. 32. $\frac{1}{2}\sqrt{a}$. 33. $\frac{2}{3}\sqrt[3]{m^2}$.

34. $\frac{5}{6}\sqrt[4]{z^5}$. 35. $\frac{3}{4}\sqrt[5]{d^3}$. 36. $\frac{3}{7}\sqrt[3]{7c^2}$. 37. $\frac{5}{6}\sqrt[3]{12m}$.

38. $\frac{4}{9}\sqrt[3]{18y^5}$. 39. $\frac{7}{8}\sqrt[4]{\frac{512m^3}{49}}$. 40. $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{a}{b}}$. 41. $\frac{m}{n}\sqrt[3]{\frac{x}{y}}$.

42. $\frac{x}{y}\sqrt[5]{\frac{y^4}{z^3}}$. 43. $\frac{a}{b}\sqrt[3]{\frac{b^4}{a^5}}$. 44. $\frac{1}{a}\sqrt[3]{\frac{m}{n^2}}$. 45. $\frac{m}{q}\sqrt[5]{\frac{1}{m^2}}$.

46. $-\frac{x}{y}\sqrt[2]{\frac{a}{b}}$. 47. $-\frac{1}{a}\sqrt{\frac{b}{c}}$. 48. $-x\sqrt[5]{\frac{a}{x^2}}$. 49. $m\sqrt[5]{1-\frac{1}{m^5}}$.

50. $-y\sqrt[3]{\frac{a}{y^2}-\frac{b}{y^3}}$. 51. $-z\sqrt[4]{\frac{a-b}{y^{-3}}}$. 52. $(a+b)\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$.

53. $(m+n)\sqrt{\frac{1}{m^2-n^2}}$. 54. $\left(\frac{b-c}{b+c}\right)\sqrt{\frac{b^2+bc}{b^2-2bc+c^2}}$.

55. $(a+b-c)\sqrt[3]{\frac{3}{a^2+2ab-2ac+b^2-2bc+c^2}}$.

56. $(2x+3y)\sqrt[5]{\frac{(4x^2-9y^2)}{(2x+3y)^6}}$. 57. $3\sqrt{\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}}}}$.

58. $5\sqrt{\frac{1}{5}\sqrt{\frac{1}{5}\sqrt{\frac{1}{5}\sqrt{\frac{1}{5}\sqrt{\frac{1}{5}}}}}}$. 59. $4\sqrt{0,25\sqrt{0,25\sqrt{0,25}}}$.

XX

2. Mise en évidence d'un facteur devant le radical.

$$\sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{b}. \qquad \sqrt[p]{a^p b} = a\sqrt[p]{b}.$$

Comment peut-on sortir du signe radical un facteur et le placer devant ce signe?

Dans les exemples suivants, faites sortir du radical tous les facteurs qui peuvent subir cette opération sans amener de fraction sous le radical.

1. $\sqrt{8}$. 2. $\sqrt{12}$. 3. $\sqrt{28}$. 4. $\sqrt{50}$. 5. $\sqrt{72}$.
6. $\sqrt[3]{72}$. 7. $\sqrt[3]{500}$. 8. $\sqrt[3]{108}$. 9. $\sqrt[3]{192}$. 10. $\sqrt[3]{56}$.
11. $\sqrt[5]{160}$. 12. $\sqrt[5]{2048}$. 13. $\sqrt[6]{3645}$. 14. $\sqrt[4]{567}$. 15. $\sqrt[4]{112}$.
16. $2\sqrt{405}$. 17. $3\sqrt[3]{864}$. 18. $5\sqrt[4]{144}$. 19. $\sqrt{a^2b}$. 20. $\sqrt[3]{m^3n^2}$.
21. $\sqrt[4]{b^8a^3}$. 22. $\sqrt[4]{b^4c}$. 23. $\sqrt[5]{c^{15}x^2}$. 24. $\sqrt[3]{x^6y^4}$. 25. $\sqrt{y^4z^3}$.
26. $\sqrt[3]{m^9n^7}$. 27. $\sqrt[4]{x^5y^6}$. 28. $\sqrt[3]{u^4v^{10}}$. 29. $\sqrt[4]{y^7z^8}$. 30. $\sqrt[10]{a^{12}b^{15}}$.
31. $\sqrt{4a^2b}$. 32. $\sqrt{25m^4x}$. 33. $\sqrt{36a^3b^2}$. 34. $\sqrt[3]{64x^6y}$.
35. $\sqrt[4]{81m^6n^2}$. 36. $\sqrt[6]{64a^8b^6}$. 37. $2\sqrt{80c^4d}$. 38. $\sqrt{\dfrac{4a^3b}{9}}$.
39. $\sqrt[3]{\dfrac{125m^2}{216n^5}}$. 40. $\sqrt{\dfrac{a^5}{4}}$. 41. $\sqrt[5]{\dfrac{m^6n}{243}}$. 42. $\sqrt[4]{\dfrac{x^5y^6}{1296}}$.
43. $\sqrt{\dfrac{(m^2-2mn+n^2)y}{49}}$. 44. $\sqrt[3]{\dfrac{(x^3-3x^2+3x-1)z^2}{512}}$.
45. $\sqrt{\dfrac{(x^2-y^2)^3}{4(x+y)}}$. 46. $\sqrt[4]{\dfrac{(9y^{10}-25z^6)^5}{81(3y^5-5z^3)}}$.

47. $\frac{7}{2x+3y^3}\sqrt[3]{\frac{(4x^2-9y^6)^4}{343(2x-3y^3)}}$. 48. $\sqrt[3]{\frac{16a^5b}{9}}$. 49. $\sqrt{\frac{20xy^3}{7}}$.

50. $\sqrt[3]{\frac{x^4}{m^3}-1}$. 51. $\sqrt[5]{a^6-3\frac{1}{2}a^7}$. 52. $\sqrt[8]{x-\frac{a}{2187}}$.

53. $\sqrt{12a^3-\frac{8a^4}{3}}$. 54. $\sqrt{\frac{a}{b^2}+\frac{1}{b}}$.

55. $\sqrt[3]{\frac{m}{a^3}-\frac{n}{a^2}}+\sqrt{\frac{m}{b^3}-an.\frac{1}{b^3}}$. 56. $\sqrt{\frac{1}{xy^2z}-\frac{1}{x^2yz}+\frac{1}{xyz^2}}$.

57. $\sqrt{(x^6-y^6)(x^3+y^3)}$. 58. $\sqrt[3]{\frac{a^4b^4}{a^2+b^2-2ab}}$.

59. $\sqrt[3]{\left(\frac{3x(1-x)-1}{x^3}+1\right)\frac{x^2}{z^4}}$.

60. $\sqrt[3]{\frac{x^3}{3}\left(\frac{5a^3}{b^3}-5\right)\cdot\frac{25(b^3-a^3)^2}{9x}}$.

XXI

3. Réduction des radicaux au même indice.

$$\sqrt[m]{a^p}=\sqrt[mn]{a^{pn}};\qquad \sqrt[m]{a^n}=\sqrt[\frac{m}{p}]{a^{\frac{n}{p}}}.$$

Prouvez les propositions rappelées en tête de ce paragraphe.

Peut-on, dans un radical, multiplier l'indice et l'exposant par un même nombre fractionnaire sans changer la valeur du radical ?

Réduisez les radicaux suivants à l'indice commun le plus petit possible.

1. $\sqrt{3}$; $\sqrt[6]{4}$. 2. $\sqrt[4]{6}$; $\sqrt{7}$. 3. $\sqrt[8]{32}$; $\sqrt[4]{5}$. 4. $\sqrt[10]{100}$; $\sqrt[5]{40}$.
5. $\sqrt{5}$; $\sqrt[3]{4}$. 6. $\sqrt[3]{2}$; $\sqrt[4]{3}$. 7. $\sqrt[3]{5}$; $\sqrt[9]{25}$. 8. $\sqrt[4]{12}$; $\sqrt[6]{2}$.
9. $\sqrt[5]{8}$; $\sqrt{2}$. 10. $\sqrt[8]{4}$; $\sqrt[4]{8}$. 11. $\sqrt[7]{11}$; $\sqrt[21]{4}$. 12. $\sqrt[5]{8}$; $\sqrt[3]{25}$.

13. $\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{5}$; $\sqrt[4]{6}$. **14.** $\sqrt[4]{7}$; $\sqrt[5]{5}$; $\sqrt[10]{120}$. **15.** $\sqrt[3]{80}$; $\sqrt[4]{50}$; $\sqrt[5]{2}$.

16. $\sqrt{3}$; $\sqrt[5]{8}$; $\sqrt[7]{4}$. **17.** $\sqrt[3]{2}$; $\sqrt[6]{20}$; $\sqrt[9]{12}$. **18.** $\sqrt[4]{5}$; $\sqrt[5]{3}$; $\sqrt[8]{5}$.

19. $\sqrt[3]{0,2}$; $\sqrt[4]{0,5}$; $\sqrt[5]{0,03}$. **20.** $\sqrt[9]{0,1}$; $\sqrt[4]{0,08}$; $\sqrt{9}$.

21. $\sqrt[7]{21}$; $\sqrt[3]{16}$; $\sqrt[5]{0,8}$. **22.** $\sqrt{\frac{3}{4}}$; $\sqrt[5]{\frac{2}{3}}$; $\sqrt[4]{\frac{5}{6}}$.

23. $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$; $\sqrt[4]{\frac{5}{8}}$; $\sqrt{\frac{3}{5}}$. **24.** $\sqrt[5]{\frac{2}{9}}$; $\sqrt{\frac{7}{10}}$; $\sqrt[10]{\frac{121}{320}}$.

25. $\sqrt[7]{\frac{5}{7}}$; $\sqrt{\frac{3}{2}}$; $\sqrt[14]{\frac{2}{11}}$. **26.** $\sqrt[8]{\frac{8}{11}}$; $\sqrt{\frac{1}{2}}$; $\sqrt[3]{\frac{7}{9}}$; $\sqrt[6]{\frac{3}{4}}$.

27. $\sqrt[7]{0,3}$; $\sqrt[6]{\frac{2}{3}}$; $\sqrt[21]{\frac{12}{17}}$.

---

28. $\sqrt{a}$; $\sqrt[3]{b}$; $\sqrt[6]{c}$. **29.** $\sqrt[3]{a}$; $\sqrt[4]{a}$. **30.** $\sqrt[5]{a^2}$; $\sqrt[3]{a}$. **31.** $\sqrt[4]{m}$; $\sqrt[3]{m^2}$.

32. $\sqrt[7]{x^3}$; $\sqrt[3]{x^5}$. **33.** $\sqrt[4]{y}$; $\sqrt[3]{y^2}$; $\sqrt{y^3}$. **34.** $\sqrt[3]{a^2}$; $\sqrt[4]{a^3}$; $\sqrt[6]{a^5}$.

35. $\sqrt{\frac{x}{y^2}}$; $\sqrt[5]{\frac{y^3}{z}}$; $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$. **36.** $\sqrt[6]{\frac{m^2}{n^3}}$; $\sqrt[5]{\frac{1}{y^4}}$; $\sqrt[3]{\frac{n}{y^2}}$.

37. $\sqrt[7]{\frac{x^2}{y}}$; $\sqrt{\frac{z}{y^2}}$; $\sqrt[3]{\frac{4}{z}}$. **38.** $\sqrt[4]{\frac{a-b}{z}}$; $\sqrt{\frac{a+b}{z^2}}$; $\sqrt[7]{\frac{a^2-b^2}{z^3}}$.

39. $\sqrt[8]{\frac{1}{a-x}}$; $\sqrt[3]{\frac{2}{a-x}}$; $\sqrt[4]{\frac{3}{a-x}}$.

40. $\sqrt[m]{\frac{x-1}{x+1}}$; $\sqrt[n]{\frac{x-1}{x+1}}$; $\sqrt[p]{\frac{x-1}{x+1}}$.

41. $\sqrt[6m]{\frac{x-y}{a-b}}$; $\sqrt[3m]{\frac{y-x}{b-a}}$; $\sqrt[2m]{\frac{b-a}{y-x}}$.

42. $\sqrt[4]{\frac{x}{y}}$; $\sqrt[m]{\frac{y}{z}}$; $\sqrt[n]{\frac{z}{u}}$; $\sqrt[3]{\frac{x}{z}}$. **43.** $\sqrt[m+1]{\frac{a}{x^2}}$; $\sqrt[4]{\frac{a^2}{x}}$; $\sqrt[m]{\frac{a^3}{x^3}}$.

44. $\sqrt{\frac{1}{a}}$; $\sqrt[3]{\frac{1}{a^5}}$; $\sqrt[4]{\frac{b}{a^2}}$. **45.** $\sqrt[m]{\frac{1}{x^2}}$; $\sqrt[n]{x}$; $\sqrt[p]{\frac{1}{x}}$.

46. $\sqrt[m]{\frac{1}{x-1}}$; $\sqrt[3]{\frac{1}{(x-1)^p}}$; $\sqrt[n]{\frac{1}{(x-1)^2}}$.

47. $\sqrt{2x}$; $\sqrt[3]{3(x-1)^4}$; $\sqrt[6]{a(x-2)^2}$.

48. $\sqrt[5]{m(x+y)^2}$; $\sqrt[3]{\frac{(x-y)}{a}}$; $\sqrt{2a}$.

49. $\sqrt[4]{\frac{1}{x^2}}$; $\sqrt[6]{\frac{3(b-c)^2}{y}}$; $\sqrt[3]{\frac{5}{a(b+c)}}$.

50. $\sqrt{ab^2c^3}$; $\sqrt[4]{\frac{4(a-1)}{3}}$; $\sqrt[8]{\frac{9(a+1)}{bc^2}}$; $\sqrt[16]{\frac{5m}{a+b}}$.

51. $\sqrt[4]{\frac{m^4n^2}{y^6}}$; $\sqrt[6]{\frac{x}{y^2}}$; $\sqrt[8]{\frac{x^6}{z^{10}}}$.

52. $\sqrt[12]{\frac{a^8y^4}{z^{12}}}$; $\sqrt[8]{\frac{x^4}{y^8}}$; $\sqrt[9]{\frac{x^6y^3}{z^6}}$; $\sqrt[4]{\frac{x^4y^2}{z^8}}$.

53. $\sqrt[4]{a^4(x-1)^6}$; $\sqrt[16]{\frac{b^8(x-1)^{12}}{y^8}}$; $\sqrt[6]{\frac{c^9(x-1)^9}{z^6}}$.

54. $\sqrt[15]{\frac{m^{10}}{n^{15}}}$; $\sqrt[10]{\frac{z^5}{y^{10}}}$; $\sqrt[20]{\frac{u^{10}}{y^{30}}}$; $\sqrt[9]{\frac{v^6}{x^{12}}}$.

XXII

4. Transformation de radicaux en racines semblables.

Qu'entend-on par racines semblables?

Se trouve-t-il des racines semblables dans les quantités $\sqrt{2}$; $3\sqrt[3]{2}$; $\sqrt[3]{4}$; $\sqrt[5]{2}$; $5\sqrt{2}$; $\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}$?

Transformez en racines semblables :

1. $\sqrt{3}$; $\sqrt{12}$. 2. $\sqrt{5}$; $\sqrt{20}$. 3. $\sqrt{63}$; $\sqrt{7}$. 4. $\sqrt{72}$; $\sqrt{8}$.
5. $3\sqrt{11}$; $\sqrt{176}$. 6. $\sqrt[3]{54}$; $2\sqrt[3]{2}$. 7. $\sqrt[3]{72}$; $\sqrt[3]{243}$. 8. $\sqrt[4]{5}$; $\sqrt[4]{405}$.
9. $\sqrt{18}$; $\sqrt{128}$; $\sqrt{32}$. 10. $7\sqrt[3]{54}$; $3\sqrt[3]{16}$; $\sqrt[3]{432}$.
11. $\sqrt{27}$; $2\sqrt{48}$; $3\sqrt{108}$. 12. $\sqrt[3]{128}$; $\sqrt[3]{686}$; $\sqrt[3]{16}$.

13. $\sqrt[4]{162}$; $3\sqrt[4]{32}$; $\sqrt[4]{2592}$. 14. $\sqrt{\frac{4}{3}}$, $2\sqrt{\frac{25}{3}}$.

15. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{5}}$; $\sqrt{\frac{2}{45}}$. 16. $3\sqrt{\frac{50}{147}}$; $\sqrt{\frac{2}{363}}$. 17. $\frac{1}{4}\sqrt{0,2}$; $\frac{1}{5}\sqrt{5}$.

18. $\sqrt{20}$; $3\sqrt{\frac{1}{5}}$; $4\sqrt{125}$; $7\sqrt{\frac{9}{5}}$; $\sqrt[4]{\frac{25}{16}}$; $3\sqrt{\frac{9}{80}}$.

19. $\sqrt[3]{\frac{8}{3}}$; $\sqrt[3]{\frac{9}{8}}$; $\sqrt[3]{\frac{72}{343}}$; $\sqrt[3]{\frac{5}{3}}$; $2\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$.

20. $\sqrt[5]{\frac{3}{16}}$; $\sqrt[5]{192}$; $\sqrt[5]{\frac{3}{512}}$; $\sqrt[5]{\frac{18}{3125}}$; $\sqrt[5]{\frac{2}{81}}$.

21. $\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}$; $\sqrt{\frac{8}{9}-\frac{1}{3}}$. 22. $\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{5}}$; $\sqrt{\frac{4}{5}-\frac{7}{9}}$.

23. $\sqrt{\frac{13}{18}+\frac{1}{36}}$; $\sqrt{\frac{1}{27}+\frac{5}{9}}$. 24. $\sqrt[3]{\frac{12}{125}-\frac{1}{25}}$; $\sqrt[3]{\frac{4\frac{7}{8}}{8}-\frac{1}{2}}$.

---

25. $\sqrt[6]{a^7b}$; $\sqrt[6]{a^{13}b^7}$. 26. $\sqrt[3]{27m^4}$; $\sqrt[3]{8m^7}$.

27. $\sqrt[3]{0,027xy^2}$; $\sqrt[3]{0,064\frac{x}{y}}$. 28. $\sqrt[3]{x^5-3x^4}$; $\sqrt[3]{\frac{x-3}{x^2}}$.

29. $\sqrt{\frac{a^4c}{b^3}}$; $\sqrt{\frac{a^2c^3}{bx^2}}$; $\sqrt{\frac{a^2cx^2}{by^2}}$. 30. $\sqrt{\frac{a^3x}{b^3}}$; $\sqrt{\frac{ax^5}{b^5}}$; $\sqrt{\frac{x^3}{ab}}$.

31. $\sqrt[4]{\frac{1}{a^3}}$; $\sqrt[4]{\frac{b^4}{a^3}}$; $\sqrt[4]{a}$; $\sqrt[4]{\frac{a}{c^4x^8}}$. 32. $\sqrt{1-\frac{1}{a^2}}$; $\sqrt{\left(\frac{a-1}{a+1}\right)}$.

33. $\sqrt{\left(\frac{1}{b}-a\right)}$; $\sqrt{\frac{bd^2-ab^2d^2}{c^2}}$.

34. $\sqrt{\left(\frac{a^2-b^2}{a+b}\right)^3}$; $\sqrt{\frac{(a^2+b^2)^2}{a-b}}$.

35. $\sqrt[3]{(x-b^2)^2}$; $\sqrt[3]{\frac{(y-z)^3}{x-b^2}}$; $\sqrt[3]{\frac{5y^5}{x-b^2}}$.

36. $\sqrt{\frac{m^3}{1-2x+x^2}}$; $\sqrt{\frac{4m-8mx+4mx^2}{c^2n^2}}$.

37. $\sqrt{a^4 - 3a^3x + a^2}$; $\sqrt{ay\,(ay - 3xy) + y^2}$.

38. $\sqrt{5x^3 - 20x^2 + 20x}$; $\sqrt{5xy^2 + 30xy + 45x}$.

39. $\sqrt[3]{8a^2y^3 - 16aby^3 + 8b^2y^3}$; $\sqrt[3]{\dfrac{1}{a - b}}$.

40. $\sqrt[3]{x^4 + a^4 - 2a^2x^2(x - a)}$;

$\sqrt[3]{x - a^4 + a(1 - 3x) - 3a^2(1 - x) + a^3(3 - x)}$.

41. $\sqrt[3]{-a^3(x-1)^2}$; $\sqrt[3]{-(m^3x^2 - 2m^3x + m^3}$; $\sqrt[3]{\dfrac{(x-1)^5}{d^3}}$.

42. $\sqrt{x + a - \dfrac{x^2 + a^2}{x - a}}$; $\sqrt{\dfrac{y^4\{(x - a)^2 + (x + a)^2\}}{(x^2 + a^2)(x - a)}}$.

43. $\sqrt{\dfrac{xy^3}{4a^2}} + \dfrac{1}{4a}\sqrt{x^3y - 4x^2y^2 + 4xy^3}$;

$$\sqrt{\frac{8x^4y^4m^6}{a + x + y}} \times \sqrt{\frac{1}{\left(x + y - a + \dfrac{a^2 - x^2 - y^2}{x + y + a}\right)}}.$$

44. $\sqrt[6]{1728}$; $\sqrt{27}$. 45. $\sqrt[4]{60025}$; $\sqrt{45}$. 46. $\sqrt[3]{16}$; $\sqrt[9]{157464}$.

47. $\sqrt[3]{120}$; $\sqrt[6]{140625}$. 48. $\sqrt[5]{972}$; $\sqrt[10]{16384}$. 49. $\sqrt{108}$; $\sqrt[8]{614656}$.

XXIII

5. Transformation des radicaux de la forme $\sqrt{a + \sqrt{b}}$ en une somme de deux radicaux simples.

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} + \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}.$$

$$\sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} - \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}.$$

Dans quel cas la transformation du radical double $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ en deux radicaux simples de la forme $\sqrt{y} + \sqrt{z}$ est-elle possible?

Dans les exemples suivants, transformer le radical double en une somme de deux radicaux simples.

1. $\sqrt{10+\sqrt{19}}$. 2. $\sqrt{4+\sqrt{7}}$. 3. $\sqrt{7+\sqrt{13}}$. 4. $\sqrt{6+\sqrt{11}}$.

5. $\sqrt{3+\sqrt{5}}$. 6. $\sqrt{3+\sqrt{8}}$. 7. $\sqrt{2+\sqrt{3}}$. 8. $\sqrt{8+\sqrt{15}}$.

9. $\sqrt{11-\sqrt{21}}$. 10. $\sqrt{9-\sqrt{32}}$. 11. $\sqrt{10-\sqrt{51}}$. 12. $\sqrt{5-\sqrt{21}}$.

13. $\sqrt{8-\sqrt{28}}$. 14. $\sqrt{12-\sqrt{80}}$. 15. $\sqrt{13-\sqrt{69}}$. 16. $\sqrt{20-\sqrt{279}}$.

17. $\sqrt{94+42\sqrt{5}}$. 18. $\sqrt{10+2\sqrt{21}}$. 19. $\sqrt{16+2\sqrt{55}}$.

20. $\sqrt{18+2\sqrt{77}}$. 21. $\sqrt{7+2\sqrt{10}}$. 22. $\sqrt{18+8\sqrt{5}}$.

23. $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$. 24. $\sqrt{94+6\sqrt{245}}$. 25. $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$.

26. $\sqrt{13-2\sqrt{30}}$. 27. $\sqrt{57-12\sqrt{15}}$. 28. $\sqrt{6-4\sqrt{2}}$.

29. $\sqrt{11-4\sqrt{7}}$. 30. $\sqrt{188-20\sqrt{57}}$. 31. $\sqrt{472-8\sqrt{3417}}$.

32. $\sqrt{483-40\sqrt{143}}$. 33. $\sqrt{100-2\sqrt{2499}}$.

34. $\sqrt{156-4\sqrt{737}}$. 35. $\sqrt{518-16\sqrt{663}}$.

36. $\sqrt{564-24\sqrt{370}}$. 37. $\sqrt{708-48\sqrt{165}}$.

38. $\sqrt{1000-2\sqrt{182919}}$.

---

39. $\sqrt{\frac{5}{7}+\frac{1}{7}\sqrt{21}}$. 40. $\sqrt{\frac{9}{11}+\frac{4}{11}\sqrt{2}}$. 41. $\sqrt{\frac{11}{12}-\frac{1}{6}\sqrt{10}}$.

42. $\sqrt{\frac{15}{16}+\frac{5}{16}\sqrt{5}}$. 43. $\sqrt{\frac{7}{13}-\frac{2}{13}\sqrt{6}}$. 44. $\sqrt{\frac{19}{20}+\sqrt{\frac{3}{5}}}$.

45. $\sqrt{\frac{21}{22}-\frac{2}{11}\sqrt{5}}$. 46. $\sqrt{\frac{5}{14}-\frac{1}{7}\sqrt{6}}$. 47. $\sqrt{0,54-4\sqrt{0,011}}$.

48. $\sqrt{0,38+3\sqrt{0,0091}}$. 49. $\sqrt{0,531-12\sqrt{0,001643}}$.

50. $\sqrt{0,151+2\sqrt{0,004578}}$. 51. $\sqrt{0,213+36\sqrt{0,000033}}$.

52. $\sqrt{0,317-6\sqrt{0,001578}}$. 53. $\sqrt{4\sqrt{5}-\sqrt{60}}$.

54. $\sqrt{3\sqrt{5}+\sqrt{40}}$. 55. $\sqrt{\frac{7}{4}\sqrt{\frac{5}{6}}-\sqrt{\frac{5}{2}}}$.

56. $\sqrt{\sqrt{124-32\sqrt{15}}}$. 57. $\sqrt[4]{14+6\sqrt{5}}$.

58. $\sqrt[4]{\sqrt{97-56\sqrt{3}}}$. 59. $\sqrt{1+\sqrt{3+\sqrt{13+4\sqrt{3}}}}$.

60. $\sqrt{3-\sqrt{3}+\sqrt{2+2\sqrt{2}\sqrt{3+\sqrt{\sqrt{2}-\sqrt{12}+\sqrt{18-\sqrt{128}}}}}}$.

61. $\sqrt{6-\sqrt{115}+\sqrt{30+\sqrt{576}+\sqrt{52+\sqrt{2304}}}}$.

---

62. $\sqrt{3a+\sqrt{5a^2}}$. 63. $\sqrt{2x^3-\sqrt{3x^6}}$. 64. $\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}$.

65. $\sqrt{x-y+2\sqrt{-xy}}$. 66. $\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}$.

67. $\sqrt{a^2+3\sqrt{\frac{2a^2}{3}-1}}$. 68. $\sqrt{1-2b\sqrt{1-b^2}}$.

69. $\sqrt{2x-2\sqrt{x^2-y^2}}$. 70. $\sqrt{a^2+2\sqrt{\frac{a^2b^2}{2}-\frac{b^4}{4}}}$.

71. $\sqrt{4a+2\sqrt{4a^2-y^4}}$. 72. $\sqrt{3y+3\sqrt{2yz-z^2}}$.

73. $\sqrt{2r^2-r\sqrt{4r^2-a^2}}$. 74. $\sqrt{a^2+2x\sqrt{a^2-x^2}}$.

75. $\sqrt{a-b-2\sqrt{a-b-1}}$.

76. $\sqrt{a^2-b^2+\sqrt{a^4+b^4-6a^2b^2}}$.

77. $\sqrt{x^2+y^2-xy\sqrt{\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-2}}$.

78. $\sqrt{2(a+x)(a+\sqrt{a^2-x^2})}$. 79. $\sqrt{9+(12-8x)\sqrt{3x-x^2}}$.

80. $\sqrt{2+9x^2+(2-6x)\sqrt{1+6x}}$.

81. $\sqrt{ab+c^2+\sqrt{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}}$. 82. $\sqrt{\frac{1}{1+\sqrt{1-c^2}}}$.

83. $\sqrt{(x+y)^2-4(x-y)\sqrt{xy}}$. 84. $\sqrt{bc+2a^2-2a\sqrt{bc+a^2}}$.

85. $\sqrt{bc+2b\sqrt{bc-b^2}}$.

86. $\sqrt{\frac{2a^2b^2+\sqrt{4a^2b^2(a^2-4b^2)(b^2-a^2)}}{4(b^2-a^2)}}$.

87. $\sqrt{3a^2+2b^2-\sqrt{12a^3b+2a^2b^2+4ab^3+3b^4}}$.

88. $\sqrt{16x^4+y^6+\sqrt{32x^4(8x^4-y^6)+y^{12}}}$.

XXIV

$$\sqrt{a\pm b\sqrt{-1}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2+b^2}}{2}}.$$

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}\pm\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{2(a\pm\sqrt{a^2-b})}.$$

$$\sqrt{a+b\sqrt{-1}}\pm\sqrt{a-b\sqrt{-1}}=\sqrt{2(a\pm\sqrt{a^2+b^2})}.$$

Transformer les quantités suivantes en deux radicaux simples (1).

1. $\sqrt{3+4\sqrt{-1}}$. 2. $\sqrt{15-20\sqrt{-1}}$. 3. $\sqrt{6+8\sqrt{-1}}$.

4. $\sqrt{39-52\sqrt{-1}}$. 5. $\sqrt{1+4\sqrt{-3}}$. 6. $\sqrt{3-6\sqrt{-\frac{3}{4}}}$.

7. $\sqrt{4+3\sqrt{-1}}$. 8. $\sqrt{2+4\sqrt{-2}}$. 9. $\sqrt{2-3\sqrt{-5}}$.

10. $\sqrt{5+5\sqrt{-3}}$. 11. $\sqrt{7-4\sqrt{-2}}$. 12. $\sqrt{8-\sqrt{-17}}$.

13. $\sqrt{12-9\sqrt{-1}}$. 14. $\sqrt{20-4\sqrt{-11}}$. 15. $\sqrt{28+4\sqrt{-15}}$.

16. $\sqrt{5-3\sqrt{-\frac{11}{9}}}$. 17. $\sqrt{0{,}45-3\sqrt{-0{,}0031}}$.

18. $\sqrt{0{,}8+2\sqrt{-0{,}65}}$. 19. $\sqrt{0{,}07+2\sqrt{-1{,}07}}$.

20. $\sqrt{\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\sqrt{-3}}$. 21. $\sqrt{3a-a\sqrt{-7}}$.

22. $\sqrt{a-2b+\sqrt{-(6ab-3b^2)}}$. 23. $\sqrt{3x-y+\sqrt{-8x(y-x)}}$.

24. $\sqrt{2x^2-3-\sqrt{-(10x^2-3x^4-8)}}$.

25. $\sqrt{x-\sqrt{-(2x+1)}}$. 26. $\sqrt{z^2+1+2\sqrt{-(z^2+2)}}$.

27. $\sqrt{m+m\sqrt{-3}}$. 28. $\sqrt{2p+p\sqrt{-5}}$. 29. $\sqrt{3x^2-x^2\sqrt{-7}}$.

30. $\sqrt{2(2y^4-y^4\sqrt{-5})}$. 31. $\sqrt{2(a^8-a^8\sqrt{-3})}$.

---

32. $\sqrt{7+\sqrt{13}}+\sqrt{7-\sqrt{13}}$. 33. $\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}$.

34. $\sqrt{4+\sqrt{7}}+\sqrt{4-\sqrt{7}}$. 35. $\sqrt{9+\sqrt{17}}-\sqrt{9-\sqrt{17}}$.

36. $\sqrt{12+2\sqrt{11}}-\sqrt{12-2\sqrt{11}}$.

37. $\sqrt{20-2\sqrt{51}}+\sqrt{20+2\sqrt{51}}$.

(1) L'élève pourra laisser de côté les exercices de ce paragraphe jusqu'à ce qu'il connaisse le calcul des imaginaires.

38. $\sqrt{6+\sqrt{-13}}+\sqrt{6-\sqrt{-13}}$.

39. $\sqrt{5+\sqrt{-11}}-\sqrt{5-\sqrt{-11}}$.

40. $\sqrt{10+2\sqrt{-11}}+\sqrt{10-2\sqrt{-11}}$.

41. $\sqrt{x-y+2\sqrt{-xy}}+\sqrt{x-y-2\sqrt{-xy}}$.

42. $\sqrt{2(4a^2+a+4a\sqrt{a})}-\sqrt{2(4a^2+a-4a\sqrt{a})}$.

43. $\sqrt{2x^2+y^2+2x\sqrt{x^2+y^2}}+\sqrt{2x^2+y^2-2x\sqrt{x^2+y^2}}$.

44. $\sqrt{a+\sqrt{-(1-2a)}}+\sqrt{a-\sqrt{-(1-2a)}}$.

45. $\sqrt{a^2+2x\sqrt{a^2-x^2}}-\sqrt{a^2-2x\sqrt{a^2-x^2}}$.

46. $\sqrt{a^2+5ax+2a\sqrt{ax+4x^2}}+\sqrt{a^2+5ax-2a\sqrt{ax+4x^2}}$.

XXV

6. Transformation de la somme ou de la différence de deux radicaux simples en un radical unique.

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}. \qquad \sqrt{a}-\sqrt{b}=\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}.$$

$$\sqrt{a}+b\sqrt{-1}=\sqrt{a-b^2+2b\sqrt{a}\sqrt{-1}}.$$

$$\sqrt{a}-b\sqrt{-1}=\sqrt{a-b^2-2b\sqrt{a}\sqrt{-1}}.$$

Transformer les quantités suivantes en un radical unique.

1. $\sqrt{2}+\sqrt{18}$. 2. $\sqrt{12}+\sqrt{75}$. 3. $\sqrt{50}+\sqrt{18}$.
4. $\sqrt{45}+\sqrt{245}$. 5. $\sqrt{6}+\sqrt{24}$. 6. $\sqrt{5}+\sqrt{45}$.
7. $\sqrt{7}+\sqrt{28}$. 8. $\sqrt{11}+\sqrt{44}$. 9. $1+\sqrt{6}$. 10. $3+\sqrt{5}$.
11. $2+\sqrt{2}$. 12. $7+\sqrt{6}$. 13. $1-\sqrt{3}$. 14. $2-\sqrt{2}$.

15. $\sqrt{7} - 2$. **16.** $\sqrt{3} - 5$. **17.** $\sqrt{7} - \sqrt{3}$. **18.** $\sqrt{8} - \sqrt{18}$.
19. $\sqrt{21} - \sqrt{28}$. **20.** $\sqrt{5} - \sqrt{15}$. **21.** $4\sqrt{3} - 3\sqrt{5}$.
22. $3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$. **23.** $\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{4}\sqrt{5}$. **24.** $\frac{2}{3}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{7}$.
25. $\sqrt{5 + \sqrt{3}} + \sqrt{5 - \sqrt{3}}$. **26.** $\sqrt{4 + \sqrt{5}} - \sqrt{4 - \sqrt{5}}$.
27. $\sqrt{6 - \sqrt{11}} + \sqrt{6 + \sqrt{11}}$.

---

28. $\sqrt{3} + 4\sqrt{-1}$. **29.** $\sqrt{5} - 2\sqrt{-1}$. **30.** $\sqrt{7} + \sqrt{-5}$.
31. $\sqrt{11} - \sqrt{-6}$. **32.** $\frac{1}{3}\sqrt{8} - \frac{1}{2}\sqrt{-7}$. **33.** $\frac{3}{4}\sqrt{12} + \frac{5}{2}\sqrt{-3}$.
34. $0,2\sqrt{-1} - 0,5\sqrt{6}$. **35.** $\frac{2}{3}\sqrt{-3} - 0,5\sqrt{8}$.
36. $\sqrt{3 + 2\sqrt{-1}} + \sqrt{3 - 2\sqrt{-1}}$.
37. $\sqrt{4 - 3\sqrt{-1}} - \sqrt{4 + 3\sqrt{-1}}$. **38.** $\sqrt{8 + 5i} + \sqrt{8 - 5i}$.

---

39. $\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3}$. **40.** $\frac{1}{2}\sqrt{a} + \frac{1}{3}\sqrt{b}$. **41.** $\sqrt{a^3b} - \sqrt{ab^3}$.
42. $\sqrt{x^2 + x - 2\sqrt{x^3 - 1}} + \sqrt{x^2 + x + 2\sqrt{x^3 - 1}}$.
43. $\sqrt{x + 1 - \sqrt{2x + 1}} - \sqrt{x + 1 + \sqrt{2x + 1}}$.
44. $\sqrt{a + 1 - \sqrt{6a - 3}} - \sqrt{a + 1 + \sqrt{6a - 3}}$.
45. $\sqrt{3(a^2 + 2) - \sqrt{54a^2 + 27}} + \sqrt{3(a^2 + 2) + \sqrt{54a^2 + 27}}$.

II. OPÉRATIONS SUR LES RADICAUX

XXVI

1. Addition et soustraction de radicaux.

Effectuez les opérations suivantes.

1. $2\sqrt{3} + 3\sqrt{3}$. **2.** $5\sqrt{7} + 3\sqrt{7} + 2\sqrt{7}$.
3. $8\sqrt{10} + 3\sqrt{10} + 2\sqrt{10}$. **4.** $7\sqrt{2} - 3\sqrt{2}$.

5. $4\sqrt{11} + 3\sqrt{11} - 5\sqrt{11}$. 6. $2\sqrt{3} - 5\sqrt{3} + 9\sqrt{3}$.

7. $4\sqrt[3]{3} - 3\sqrt[3]{3} + 2\sqrt[3]{3}$. 8. $11\sqrt{13} - 4\sqrt{13}$. 9. $7\sqrt{2} - \sqrt{18}$.

10. $5\sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{32} - \sqrt[3]{108}$. 11. $5\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 4\sqrt{2}$.

12. $3\sqrt[5]{2} + 4\sqrt[5]{2} - \sqrt[5]{64}$. 13. $\frac{1}{2}\sqrt[3]{5} + 2\frac{1}{2}\sqrt[3]{5} + \frac{1}{4}\sqrt[3]{40}$.

14. $3\sqrt[4]{3} - 5\sqrt[4]{48} + \sqrt[4]{243}$. 15. $2\sqrt{175} - 3\sqrt{63} + 5\sqrt{28}$.

16. $\sqrt{2} + 3\sqrt{32} + \frac{1}{2}\sqrt{128} - 6\sqrt{18}$.

17. $\sqrt{75} + \sqrt{48} - \sqrt{147} + \sqrt{300}$.

18. $20\sqrt{245} - \sqrt{5} + \sqrt{125} - 2\frac{1}{2}\sqrt{180}$.

19. $2\sqrt{20} + \frac{1}{2}\sqrt{12} - 2\sqrt{27} + 5\sqrt{45} - 9\sqrt{12}$.

20. $3\sqrt{7} + 2\sqrt{54} - 5\sqrt{63} + 3\sqrt{150} + 4\sqrt{63} + 7\sqrt{24}$.

21. $7\sqrt{25} + 4\sqrt{45} - \sqrt{9} - 2\sqrt{80} + \sqrt{20} - 4\sqrt{64}$.

22. $\sqrt{275} + \sqrt{1300} - \sqrt{44} + \sqrt{52} - 2\sqrt{99} - 2\sqrt{208}$.

23. $\sqrt{\frac{45}{4}} + \frac{3}{\sqrt{8}} - \sqrt{20} - \frac{\sqrt{245}}{6} - 5\sqrt{\frac{1}{18}} - \sqrt{\frac{49}{2}}$.

24. $\sqrt[3]{\frac{4}{27}} - \sqrt[3]{\frac{10}{2}} - 3\sqrt[3]{256} + \sqrt[3]{625} + \sqrt[3]{\frac{32}{27}} - \sqrt[3]{\frac{125}{54}}$.

25. $\sqrt{9} + \sqrt{20} - \sqrt{\frac{1}{16}} - \sqrt{\frac{9}{5}} + \sqrt{\frac{9}{16}} + \sqrt{\frac{25}{81}} + \sqrt{\frac{20}{9}}$.

26. $\sqrt[3]{54} + \sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt[3]{250} - \frac{3}{4}\sqrt{\frac{2}{9}} + 0{,}5\sqrt{\frac{128}{9}} + \sqrt[3]{6\frac{3}{4}}$.

27. $2\sqrt{\frac{5}{3}} + \sqrt{60} - \sqrt{15} + \sqrt{\frac{3}{5}} + \sqrt{\frac{4}{15}}$.

28. $3\frac{1}{2}\sqrt{24} - 5\frac{3}{4}\sqrt{54} + 13\frac{1}{3}\sqrt{99} + 2\frac{17}{24}\sqrt{216} - 21\sqrt{44}$.

29. $\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{2}{49}} + 0{,}8\sqrt{\frac{8}{3}} - \frac{1}{15}\sqrt{96} + 1{,}5\sqrt[3]{\frac{7}{4}} - \frac{11}{28}\sqrt[3]{1750}$
$+ 8\sqrt{\frac{3}{2}}$.

30. $24\sqrt[4]{\frac{4}{81}} - \frac{5}{6}\sqrt[3]{\frac{5}{16}} - 6\sqrt[4]{\frac{4}{625}} + \frac{15}{4}\sqrt[4]{\frac{81}{64}} - \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{108}{25}} +$
$14\sqrt[4]{\frac{16}{5184}}$.

31. $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{4\frac{1}{2}}} + 6\sqrt[3]{\frac{2}{9}} - 7\sqrt[3]{\left(\frac{4}{3}\right)^2} + \frac{5}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} + 3\sqrt{\frac{1}{6}}$.

32. $\frac{2}{9}\sqrt{648} + \frac{1}{5}\sqrt[3]{-\frac{125}{4}} - 2\sqrt[3]{-6\frac{3}{4}} - 4\sqrt{0,5} +$
$\frac{4}{3}\sqrt[3]{\frac{0,054}{125}} - 0,3\sqrt[3]{-0,432}$.

33. $5\sqrt[6]{\frac{2187}{15625}} + \sqrt[4]{\frac{6480}{256}} + \sqrt[3]{\sqrt{46875}} - \sqrt{\sqrt{12005}} +$
$\sqrt[4]{1280 \times 36^2}$.

34. $0,5\sqrt[5]{\frac{243}{32}} + 15\sqrt{\sqrt{\frac{16807}{625}}} - 0,3\sqrt[5]{\frac{1}{7776}} - 8\sqrt{\sqrt{28672}}$
$+ \sqrt[4]{\frac{1792}{1296}}$.

35. $5\sqrt{\sqrt{1024}} - \sqrt{3 + \sqrt{5}} - 13\sqrt{\sqrt{\frac{81}{4}}} + 7\sqrt{\frac{5}{2}}$.

36. $6\sqrt[6]{\frac{6}{729}} - 3\sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{5 - 2\sqrt{6}} - \sqrt[6]{384} + 2\sqrt{\frac{1}{2}}$.

37. $\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{4}} - \frac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{98}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{44}}{\sqrt{11}} - \frac{\sqrt{54}}{\sqrt{6}}$.

38. $\frac{\sqrt[3]{40}}{\sqrt[3]{5}} + \frac{\sqrt[3]{448}}{\sqrt[3]{7}} - \frac{\sqrt[3]{1125}}{\sqrt[3]{9}} - \frac{\sqrt[3]{297}}{\sqrt[3]{11}} + \frac{\sqrt[3]{168}}{\sqrt[3]{21}} + \frac{\sqrt[3]{324}}{\sqrt[3]{12}}$.

39. $\frac{\sqrt[5]{384}}{\sqrt[5]{4}} + \frac{\sqrt[5]{18750}}{\sqrt[5]{2}} - \frac{\sqrt[5]{151263}}{\sqrt[5]{3}} + \frac{\sqrt[5]{480}}{\sqrt[5]{5}} - \frac{\sqrt[5]{56250}}{\sqrt[5]{6}}$.

40. $\frac{\sqrt[4]{7776}}{\sqrt[4]{2}} - \frac{\sqrt[4]{24576}}{\sqrt[4]{3}} - \frac{\sqrt[4]{5632}}{\sqrt[4]{11}} + \frac{\sqrt[4]{1134}}{\sqrt[4]{7}} + \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt[4]{486}}{\sqrt[4]{3}}$.

41. $\dfrac{\sqrt[6]{189}}{\sqrt[3]{3}} - \dfrac{\sqrt[6]{10752}}{\sqrt[2]{2}} + \dfrac{\sqrt[3]{105}}{\sqrt[6]{525}} + \dfrac{3\sqrt[6]{750141}}{\sqrt[3]{7}} - \dfrac{\sqrt[6]{6720}}{\sqrt[6]{5}}.$

42. $\dfrac{\sqrt[4]{25920}}{\sqrt[2]{8}} + \dfrac{\sqrt[4]{810}}{\sqrt[4]{2}} - \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{\sqrt[4]{32000}}{\sqrt[2]{5}} + \dfrac{\sqrt[2]{45}}{\sqrt[4]{5}} - \dfrac{\sqrt[4]{50000}}{2}.$

43. $\dfrac{\sqrt[8]{104976}}{\sqrt[4]{2}} - \dfrac{\sqrt[8]{82944}}{\sqrt[2]{3}} + \dfrac{\sqrt[4]{64}}{\sqrt[8]{2}} - \dfrac{\sqrt[4]{30}}{\sqrt[4]{15}} + \dfrac{\sqrt[8]{1024}}{2}.$

44. $\dfrac{\sqrt[4]{144}}{\sqrt{3}} + \dfrac{\sqrt[2]{375}}{\sqrt[4]{225}} - \dfrac{1}{3}\dfrac{\sqrt[4]{20736}}{2} - \dfrac{\sqrt[4]{80}}{\sqrt[4]{5}} + \dfrac{\sqrt[4]{567}}{\sqrt[4]{7}}.$

---

45. $\sqrt{a} - \frac{1}{2}\sqrt{a} + \frac{3}{2}\sqrt{a}.$ **46.** $\sqrt[3]{a^2} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{a^2} - 3\sqrt[3]{27a^2}.$

47. $\sqrt{a^3} + b\sqrt{a} - 3\sqrt{a}.$ **48.** $\sqrt{25b} + 2\sqrt{9b} - 3\sqrt{4b}.$

49. $\sqrt[3]{27c^4} - \sqrt[3]{8c^4} + \sqrt[3]{125c}.$ **50.** $\sqrt[5]{a^5b} - \sqrt[5]{b^6} + \sqrt[5]{32b}.$

51. $\sqrt{a^4x} + \sqrt{b^4x} - \sqrt{4a^2b^2x}.$ **52.** $\sqrt{4x^2y^2z} + \sqrt{y^4z} + \sqrt{x^4z}.$

53. $\sqrt{a^2b^2c} - a\sqrt{4c} + b\sqrt{a^2c}.$ **54.** $\sqrt[4]{81a^5} - \sqrt[4]{16a} + \sqrt[4]{256a^5}.$

55. $\sqrt[3]{27m^4} - \sqrt[3]{125m} + \sqrt[3]{216m}.$ **56.** $\sqrt{8a} - \sqrt{50a^3} - 3\sqrt{18a}.$

57. $6a\sqrt{63ab^3} - 3\sqrt{112a^3b^3} + 2ab\sqrt{343ab} - 5b\sqrt{28a^3b}.$

58. $3\sqrt{125m^3n^2} + n\sqrt{20m^3} - \sqrt{500m^3n^2} - m\sqrt{45mn^2}.$

59. $\sqrt{32a^4b^5} + 6\sqrt{72b} + 3\sqrt{128a^2b^3} - 4\sqrt{288a^2b^3}.$

60. $2\sqrt[3]{a^6b} - 3a^2\sqrt[3]{64b} + 5a\sqrt[3]{a^3b} + 2a^2\sqrt[3]{125b^4} + 3\sqrt[3]{27a^6b}.$

61. $b\sqrt{\dfrac{4a}{b^4}} - \sqrt{\dfrac{9a}{b^2}} + \dfrac{1}{b}\sqrt{\dfrac{a}{4}} + 2b\sqrt{\dfrac{25a}{4b^4}}.$

62. $\dfrac{1}{a^2c}\sqrt{3a^8c^4d} - \dfrac{2}{ac^2}\sqrt{12a^6c^6d} + \dfrac{2}{3ac}\sqrt{27a^6c^4d} -$
$\dfrac{a^4c^2}{m}\sqrt{\dfrac{3m^2d}{a^4c^2}} + \dfrac{5}{a}\sqrt{3a^6c^2d}.$

63. $m^4n^3\sqrt[3]{\dfrac{5y}{m^9n^3}} + 6\sqrt[3]{\dfrac{5m^3n^6y}{8}} - 8m^5n^4\sqrt[3]{\dfrac{5y}{8m^{12}n^6}} +$
$m\sqrt[3]{\dfrac{5n^6y}{8}} - \sqrt{\dfrac{135m^3n^6y}{8}}.$

64. $mx\sqrt{\frac{0,54z}{m^2x^2}} - \frac{a^2}{y}\sqrt{\frac{0,375y^2z}{a^4}} + \frac{1}{m}\sqrt{8,64m^2z} - \frac{b^2}{c^3}\sqrt{\frac{6c^6z}{b^4}}$
$+ 3,1a^2\sqrt{\frac{6z}{a^4}}.$

65. $m\sqrt{9x^4} - 2x^2\sqrt{\frac{m^2}{9}} + \frac{1}{3}\sqrt{m^2x^4} + 10x^2\sqrt{\frac{m^2}{4}} - m\sqrt{\frac{4x^4}{9}}.$

66. $5\sqrt{a^2x} - b^2\sqrt[3]{\frac{27a}{b^3}} - 6\sqrt{\frac{b^2x}{9}} + 5\sqrt{\frac{a^2x}{25}} + c^3\sqrt[3]{\frac{343a}{c^6}}.$

67. $n^2\sqrt[3]{\frac{-0,064m}{n^6}} - a\sqrt[3]{\frac{-0,000125m}{a^3}} + \sqrt[3]{\frac{-0,729m^3}{m^2}} -$
$\frac{z}{x^2}\sqrt[3]{\frac{-0,027mx^6}{z^3}} - \frac{2}{n^3}\sqrt[3]{\frac{-0,001mn^9}{8}}.$

68. $6\sqrt[5]{-\frac{am^5}{32}} + n^3\sqrt[3]{-\frac{8h}{n^6}} - 2p\sqrt[5]{-\frac{243an^5}{p^5}} +$
$n^4\sqrt[3]{-\frac{27h}{n^9}} - \frac{2}{a}\sqrt[3]{-\frac{a^3h}{8}} + 12\sqrt[5]{-\frac{an^5}{1024}}.$

69. $\sqrt{\frac{(x^2-y^2)(x-y)^2}{x+y}} + \sqrt{\frac{(4x^2-9y^2)^2(x-y)}{(2x-3y)^2}} -$
$(x^2-y^2)\sqrt{\frac{(x+y)^2}{x-y}} + \frac{2xy}{x-y}\sqrt{\frac{(x^2-y^2)^3}{(x+y)^3}}.$

70. $\sqrt{9m^2-9m^3} + 5\sqrt{a^2-a^2m} + 3\sqrt{(1-m)^3} - \sqrt{4b^6-4b^6m}.$

XXVII

2. Multiplication de radicaux.

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}. \qquad \sqrt[x]{a^y} = \sqrt[nx]{a^{ny}}.$$

$$\sqrt[m]{a^p} \times \sqrt[n]{c^q} = \sqrt[mn]{a^{pn}} \times \sqrt[mn]{c^{mq}} = \sqrt[mn]{a^{pn}c^{mq}}. \qquad \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a.$$

Comment multiplie-t-on deux radicaux de même indice?

Si les radicaux ont des indices différents, comment les multiplie-t-on?

Effectuez les multiplications suivantes :

1. $\sqrt{3} \times \sqrt{27}$. 2. $\sqrt{5} \times \sqrt{20}$. 3. $\sqrt{2} \times \sqrt{18}$.

4. $\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{9}$. 5. $\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{32}$. 6. $\sqrt[3]{16} \times \sqrt[3]{32}$.

7. $\sqrt[4]{27} \times \sqrt[4]{3}$. 8. $\sqrt[4]{108} \times \sqrt[4]{12}$. 9. $\sqrt[5]{4} \times \sqrt[5]{8}$.

10. $\sqrt[5]{27} \times \sqrt[5]{9}$. 11. $\sqrt{2} \times \sqrt{12}$. 12. $\sqrt[3]{7} \times \sqrt[3]{-49}$.

13. $\sqrt[6]{1331} \times \sqrt[6]{11} \times \sqrt[6]{121}$. 14. $\sqrt[5]{8} \times \sqrt[5]{-4}$.

15. $\sqrt[4]{9} \times \sqrt[4]{81} \times \sqrt[4]{729}$. 16. $\sqrt{6} \times \sqrt{12} \times \sqrt{72}$.

17. $\sqrt[8]{5^3} \times \sqrt[8]{5^7} \times \sqrt[8]{5^6}$. 18. $\sqrt[3]{-9^4} \times \sqrt[3]{9} \times \sqrt[3]{9^4}$.

19. $\sqrt[3]{-108} \times \sqrt[3]{50} \times \sqrt[3]{40}$. 20. $\sqrt[5]{7^3} \times \sqrt[5]{-112} \times \sqrt[5]{14}$.

21. $\sqrt{3} \times \sqrt{6}$. 22. $\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{18}$. 23. $\sqrt[4]{6} \times \sqrt[4]{8}$.

24. $\sqrt[5]{54} \times \sqrt[5]{9}$. 25. $\sqrt[3]{81} \times \sqrt[3]{-45}$. 26. $2\sqrt{8} \times \sqrt{2}$.

27. $3\sqrt[3]{16} \times 5\sqrt[3]{4}$. 28. $\frac{1}{2}\sqrt[4]{8} \times \frac{3}{4}\sqrt[4]{2}$. 29. $\frac{2}{3}\sqrt[3]{18} \times \frac{3}{4}\sqrt[3]{-3}$.

30. $5\sqrt{2} \times 0{,}4\sqrt{72}$. 31. $(\sqrt{18} + 2\sqrt{72} - 3\sqrt{8} - \frac{1}{2}\sqrt{128})\sqrt{2}$.

32. $(\sqrt[3]{32} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{864} + 3\sqrt[3]{4})\sqrt[3]{2}$.

33. $(\frac{1}{3}\sqrt{27} - \frac{1}{4}\sqrt{2187} + \frac{1}{8}\sqrt{432} - \sqrt{16875})\sqrt{3}$.

34. $(3\sqrt[3]{24} + 4\sqrt[3]{81} - 5\sqrt[3]{375} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{192})\sqrt[3]{2}$.

35. $\left(\sqrt{5 - \sqrt{4}}\right)\left(\sqrt{5 + \sqrt{4}}\right)$. 36. $\left(\sqrt{3 - \sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{3 + \sqrt{2}}\right)$.

37. $\left(\sqrt{9 - \sqrt{17}}\right)\left(\sqrt{9 + \sqrt{17}}\right)$. 38. $\left(\sqrt{6 + \sqrt{11}}\right)\left(\sqrt{6 - \sqrt{11}}\right)$.

39. $\left(\sqrt{8 + \sqrt{15}}\right)\left(\sqrt{8 - \sqrt{15}}\right)$. 40. $\left(\sqrt[3]{10 - \sqrt{36}}\right)\left(\sqrt[3]{10 + \sqrt{36}}\right)$.

41. $\left(\sqrt[3]{9 + \sqrt{17}}\right)\left(\sqrt[3]{9 - \sqrt{17}}\right)$. 42. $\left(\sqrt[3]{12 + \sqrt{19}}\right)\left(\sqrt[3]{12 - \sqrt{19}}\right)$.

43. $(3 + 2\sqrt{5})(2 - \sqrt{5})$. 44. $(8 + 3\sqrt{2})(2 - \sqrt{2})$.

45. $(5 + 2\sqrt{3})(3 - 5\sqrt{3})$. 46. $(3 - \sqrt{6})(6 - 3\sqrt{6})$.

47. $(2\sqrt{6} - 3\sqrt{5})(\sqrt{3} + 2\sqrt{2})$. 48. $(\sqrt{7} - \sqrt{3})(\sqrt{2} + \sqrt{5})$.

49. $(\sqrt[3]{9} - 2\sqrt[3]{4})(4\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2})$.

50. $(2\sqrt{30} - 3\sqrt{5} + 5\sqrt{3})(\sqrt{8} + \sqrt{3} - \sqrt{5})$.

51. $(3\sqrt{5} - 2\sqrt{3} + 4\sqrt{7})(3\sqrt{7} - 4\sqrt{5} - 5\sqrt{3})$.

52. $(2\sqrt{\tfrac{1}{2}} - 3\sqrt{3} + 4\sqrt{8})(3\sqrt{8} + \sqrt{18} - \sqrt{3})$.

53. $(3\sqrt{3} - 4\sqrt{8} + 5\sqrt{18})(5\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{\tfrac{1}{2}})$.

54. $(4\sqrt{8} + \tfrac{1}{2}\sqrt{12} - \tfrac{1}{4}\sqrt{32})(8\sqrt{32} - 4\sqrt{50} - 2\sqrt{2})$.

55. $(\sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{16})(\sqrt[3]{36} + \sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{4})$.

56. $(\sqrt[3]{16} - 2\sqrt[3]{2} + 4\sqrt[3]{54})(5\sqrt[3]{4} + 3\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}} - 2\sqrt[3]{2})$.

57. $(\sqrt[3]{9} - 7\sqrt[3]{72} + 6\sqrt[3]{1125})(3\sqrt[3]{2} + 8\sqrt[3]{3} - 4\sqrt[3]{\tfrac{1}{9}})$.

58. $(0{,}4\sqrt[3]{25} + 0{,}2\sqrt[3]{200} - \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{75})(2\sqrt[3]{135} - 5\sqrt[3]{5} - 10\sqrt[3]{15})$.

59. $(2\sqrt{\tfrac{2}{3}} - 8\sqrt{\tfrac{3}{8}} + 3\sqrt{\tfrac{3}{2}})(3\sqrt{\tfrac{2}{3}} - \sqrt{12} - \sqrt{6})$.

60. $(2\sqrt{\tfrac{5}{6}} - 4\sqrt{\tfrac{3}{2}} - 7\sqrt{\tfrac{6}{5}})(3\sqrt{\tfrac{5}{6}} - 5\sqrt{30} - 2\sqrt{\tfrac{15}{2}})$.

61. $(3\sqrt{2} + 4\sqrt{5} - 2\sqrt{3})^2$. 62. $(5\sqrt{6} - 3\sqrt{3} - 2\sqrt{24})^2$.

63. $(3\sqrt{5} - 4\sqrt{45} + 2\sqrt{20})^2$. 64. $(2\sqrt{12} + 3\sqrt{3} + 6\sqrt{\tfrac{1}{3}})^2$.

65. $(2\sqrt{7} - 8\sqrt{28} - 5\sqrt{63})^2$. 66. $(\tfrac{1}{2}\sqrt{24} - \tfrac{3}{4}\sqrt{6} + 5\sqrt{3})^2$.

---

67. $\sqrt{a}$. $\sqrt{b}$. 68. $2\sqrt{a}$. $3\sqrt{x}$. 69. $2\sqrt{a}$. $\sqrt{9a}$. 70. $5\sqrt{x}$. $\sqrt{2x}$.

71. $a\sqrt{x}$. $b\sqrt{x}$. 72. $m\sqrt{6y}$. $n\sqrt{24y^3}$. 73. $2\sqrt{3b}$. $x\sqrt{4b}$.

74. $m\sqrt{a^p}$. $2\sqrt{a^p}$. 75. $\tfrac{1}{2}\sqrt{b^5}$. $6\sqrt{b^3}$. 76. $a^2\sqrt{2x}$. $\dfrac{1}{a}\sqrt{8x}$.

77. $\dfrac{a}{m}\sqrt{3y}$. $\dfrac{m^2}{a}\sqrt{27y^3}$. 78. $2m\sqrt{15x^3}$. $\tfrac{1}{2}\sqrt{5x}$. 79. $\sqrt{3u}$. $\sqrt{u^3}$.

80. $\sqrt[3]{a^2}$. $\sqrt[3]{27a}$. 81. $2\sqrt[3]{25x^5}$. $3\sqrt[3]{15x^4}$. 82. $\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{4y^2}$. $8\sqrt[3]{2y^4}$.

83. $2\sqrt{a}$. $3\sqrt{a^2}$. $4\sqrt{a^3}$. 84. $5\sqrt[3]{b}$. $6\sqrt[3]{b^2}$. $7\sqrt[3]{b^3}$.

85. $\sqrt{m}$. $\sqrt{\dfrac{a}{m}}$. 86. $\sqrt{\dfrac{a^2}{b}}$. $\sqrt{\dfrac{b^2}{a}}$. 87. $\sqrt{20a}$. $\sqrt{\dfrac{4b^2}{5a^3}}$.

88. $3\sqrt{\dfrac{5a}{b^2}}$. $2\sqrt{\dfrac{4b^4}{5a^3}}$. 89. $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{8x}{3y^2}}$. $\dfrac{3}{4}\sqrt{\dfrac{3y^3}{2x^3}}$.

90. $5\sqrt{\frac{a^2}{b}} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4a^2}{b}}$. **91.** $\sqrt[3]{\frac{a^2}{m}} \cdot \sqrt[3]{\frac{8a}{m^4}}$.

92. $\sqrt[3]{\frac{2x^4}{25y^5}} \cdot 5\sqrt[3]{\frac{4x^5}{5y}}$. **93.** $\sqrt{a^2 + \sqrt{b}} \cdot \sqrt{a^2 - \sqrt{b}}$.

94. $\sqrt{m + \sqrt{n^3}} \cdot \sqrt{m - \sqrt{n^3}}$. **95.** $\sqrt{2a - \sqrt{5a^3}} \cdot \sqrt{2a + \sqrt{5a^3}}$.

96. $(a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b})$. **97.** $(\sqrt{u} + v)(\sqrt{u} - v)$.

98. $(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})$. **99.** $(3\sqrt{m} + 2\sqrt{n})(3\sqrt{m} - 2\sqrt{n})$.

100. $(m\sqrt{a} - n\sqrt{b})(m\sqrt{a} + n\sqrt{b})$.

101. $(m\sqrt{n} + n\sqrt{m})(m\sqrt{n} - n\sqrt{m})$.

102. $(\sqrt{a + b} + \sqrt{a})(\sqrt{a + b} - \sqrt{a})$.

103. $(\sqrt{c} - \sqrt{c - d})(\sqrt{c} + \sqrt{c - d})$.

104. $(\sqrt{x^5} - \sqrt{x^5 - y})(\sqrt{x^5} + \sqrt{x^5 - y})$.

105. $(3\sqrt{d} + 2\sqrt{a + 1})(3\sqrt{d} - 2\sqrt{a + 1})$.

106. $(a\sqrt{u^3} + b\sqrt{x - 1})(a\sqrt{u^3} - b\sqrt{x - 1})$.

107. $\left(\frac{1}{a}\sqrt{1 - x} + \sqrt{x}\right)\left(\frac{1}{a}\sqrt{1 - x} - \sqrt{x}\right)$.

108. $(\sqrt{4x + 2y} - 2\sqrt{x})(\sqrt{4x + 2y} + 2\sqrt{x})$.

109. $(\sqrt{25y - z} + 5\sqrt{y})(\sqrt{25y - z} - 5\sqrt{y})$.

110. $(\sqrt{9a - 1} + 3\sqrt{a})(\sqrt{9a - 1} + 3\sqrt{a})$.

111. $(\sqrt{a + b} + \sqrt{a - b})(\sqrt{a + b} - \sqrt{a - b})$.

112. $(\sqrt{2a + 3b} + \sqrt{2a - 3b})(\sqrt{2a + 3b} - \sqrt{2a - 3b})$.

113. $(\sqrt{z - u} + \sqrt{z + 2u})(\sqrt{z - u} - \sqrt{z + 2u})$.

114. $(\sqrt{2m - a} + \sqrt{m - 2a})(\sqrt{2m - a} - \sqrt{m - 2a})$.

115. $(\sqrt{x + y + z} + \sqrt{x + y - z})(\sqrt{x + y + z} -$
$\sqrt{x + y - z})$.

116. $(\sqrt{a + b - c} + \sqrt{a - b + c})(\sqrt{a + b - c} -$
$\sqrt{a - b + c})$.

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

121. [illegible]

122. [illegible] 123. $\sqrt{4x^2-1}\sqrt{\frac{2x-1}{2x-1}}$.

124. [illegible] 125. $\sqrt{1-36y^4}\sqrt{\frac{1-6y^2}{1-6y^2}}$.

126. $\sqrt{\frac{1}{y}-\frac{a}{b}}\times\sqrt{\frac{1}{y}-\frac{a}{b}}$. 127. $\sqrt{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}\times\sqrt{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$.

128. $\sqrt{\frac{2a}{3}-\frac{3b}{4}}\times\sqrt{\frac{2a}{3}+\frac{3b}{4}}$. 129. $\sqrt{\frac{4}{x}-\frac{x}{4}}\times\sqrt{\frac{4}{x}+\frac{x}{4}}$.

130. $\frac{a-1}{a-2}\sqrt{\frac{3a^3}{2b^2}}\times\frac{a^2-4}{a^2-1}\sqrt{\frac{3a}{2b^3}}$.

131. $\frac{a+3}{2x-1}\sqrt{\frac{5m}{4n^2}}\times\frac{4x^2-1}{9-a^2}\sqrt{\frac{64n^6}{125m^3}}$.

132. $\frac{5+2a}{2m-n}\sqrt{\frac{m^2-b^2}{y+x}}\times\frac{4m^2-n^2}{4a^2-25}\sqrt{\frac{x^2-y^2}{b+m}}$.

133. $\sqrt{a\sqrt[3]{a^2}}\times\sqrt[3]{\sqrt{a}}$. 134. $\sqrt[3]{x\sqrt{x^6}}\times\sqrt[3]{x\sqrt[3]{x^3}}$.

135. $(\sqrt{a^5}-a\sqrt{b^5}+3\sqrt{a^3c})2a\sqrt{a^7}$.

136. $(b\sqrt{b}-\frac{1}{2}b^2\sqrt{b^3}+3b^3\sqrt{b^7})(-6\sqrt{b^3})$.

137. $(5\sqrt[3]{c^7}-a\sqrt[3]{9c^5}+a^2\sqrt[3]{25c^2})a^2\sqrt[3]{15c^5}$.

138. $(x\sqrt[3]{12x^5}-2x^3\sqrt[3]{4x^2}+5x^5\sqrt[3]{9x^7})0{,}5\sqrt[3]{18x}$.

139. $\left(y^2\sqrt[4]{27z^5}+\frac{3}{y}\sqrt[4]{\frac{z^9}{243}}-\frac{15}{2y}\sqrt[4]{\frac{16z^{17}}{3}}\right)\frac{2y}{3}\sqrt[4]{3z^3}$.

140. $\left(\frac{a^2b}{x}\sqrt[5]{16u^3} + \frac{0{,}3a^3}{x^2}\sqrt[5]{\frac{u^{-7}}{64}} - \sqrt[5]{\frac{u^{-17}a^{10}}{x^5}}\right)\frac{10x^2}{a^2}\sqrt[5]{2u^{12}}.$

141. $\left(a^2\sqrt{x} - a\sqrt{x^3} - \frac{1}{2}\sqrt{x^5}\right)\left(4\sqrt{x} - \frac{6}{a}\sqrt{x^3}\right).$

142. $\left(-6\sqrt[3]{y^{-2}z^{-1}} - 2x^2\sqrt[3]{y^4z^2} + 3x\sqrt[3]{yz^5}\right)\left(\frac{7}{12x}\sqrt[3]{y^2z} + 5x\sqrt[3]{y^{-4}z^7}\right).$

143. $\left(a\sqrt[4]{bc^3} - a^2\sqrt[4]{b^2c^5} - a^3\sqrt[4]{b^3c^7}\right)\left(\frac{2}{a}\sqrt[4]{b^5c^3} - 4\sqrt[4]{b^7c^5}\right).$

144. $(3\sqrt{x^5} - 2\sqrt{x^3})^2.$ **145.** $(a\sqrt{y} + b\sqrt{y^3})^2.$

146. $(m^2\sqrt{ab^3} - m\sqrt{a^3b})^2.$ **147.** $(2p\sqrt{12z^5} - \frac{1}{2}q\sqrt{18z})^2.$

148. $\left(3a^{-2} + \sqrt{2a^5} - \frac{1}{a}\sqrt{3a^3}\right)^2.$ **149.** $(a\sqrt{a^{-1}} - a^2\sqrt{a^3} + a^3\sqrt{a^5})^2.$

150. $(x\sqrt[3]{a^2} - x^2\sqrt[3]{a^4} + x^3\sqrt[3]{a^5})^2.$

---

151. $\sqrt{5}\ \sqrt[3]{4}.$ **152.** $\sqrt{125}\ \sqrt[4]{36}.$ **153.** $\sqrt[3]{16}\ \sqrt[6]{250}.$ **154.** $\sqrt[4]{36}\ \sqrt[8]{1296}.$

155. $\sqrt[4]{64} \times \sqrt[8]{16}.$ **156.** $\sqrt[3]{20} \times \sqrt[9]{1000}.$ **157.** $\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \times \sqrt[12]{256^2}.$

158. $\sqrt{15} \times \sqrt[6]{27 \times 125}.$ **159.** $\sqrt[5]{12} \times \sqrt[10]{96}.$ **160.** $3 \times \sqrt[3]{72}.$

161. $\sqrt[15]{27} \times \sqrt[4]{42}.$ **162.** $\sqrt[24]{256} \times \sqrt[5]{2}.$ **163.** $\sqrt[7]{7^5} \times \sqrt{56}.$

164. $\sqrt[6]{6^2} \times \sqrt[10]{42^7}.$ **165.** $\sqrt[5]{\frac{3}{8}} \times \sqrt[3]{\frac{2}{3}}.$ **166.** $\sqrt[4]{\frac{7}{9}} \times \sqrt[5]{\frac{15}{7}}.$

167. $\sqrt[8]{\frac{4}{81}} \times \sqrt[5]{\frac{27}{32}}.$ **168.** $\sqrt[9]{\frac{9}{28}} \times \sqrt[4]{\frac{2}{3}}.$ **169.** $\sqrt[10]{\frac{125}{16}} \times \sqrt[3]{\frac{4}{5}}.$

170. $\sqrt[4]{0{,}2} \times \sqrt[5]{0{,}5}.$ **171.** $\sqrt[4]{0{,}3} \times \sqrt[3]{0{,}8}.$ **172.** $\sqrt[7]{9{,}6} \times \sqrt{5}.$

173. $(2\sqrt{6} + 3\sqrt[3]{15} - \sqrt[5]{10})\sqrt[4]{12}.$ **174.** $(3\sqrt{10} - 2\sqrt[3]{4} + \sqrt[6]{25})\sqrt[4]{2}.$

175. $(2\sqrt[7]{10} + 3\sqrt{2} - 4\sqrt[3]{5})\sqrt[4]{10}.$

176. $(3\sqrt[5]{6} - 2\sqrt{3})(\sqrt[3]{4} + 4\sqrt[4]{9}).$

177. $(5\sqrt[4]{15} + 2\sqrt[3]{9})(\sqrt[6]{6} + 4\sqrt[12]{100}).$ **178.** $(2\sqrt[3]{15} + 3\sqrt[4]{10})^2.$

179. $(5\sqrt[5]{20} - 4\sqrt[3]{30})^2.$ **180.** $(\sqrt{5} - 2\sqrt[3]{15} + \sqrt[5]{9})^2.$

181. $\sqrt{a^3} \times \sqrt[3]{a}.$ **182.** $\sqrt{ab^2} \times \sqrt[4]{a^2b^3}.$ **183.** $\sqrt{cx^3} \times \sqrt[5]{c^2x}.$

184. $\sqrt{2x} \times \sqrt[7]{4cx^3}$. **185.** $\sqrt[3]{b^2c^5} \times \sqrt[4]{b^3c}$. **186.** $\sqrt[3]{x^4y^2} \times \sqrt[5]{x^4y^4}$.

187. $\sqrt[3]{4a^4} \times \sqrt{2a^2}$. **188.** $3\sqrt{m} \times \sqrt[3]{2m^2}$. **189.** $3\sqrt{2x} \times 5\sqrt[4]{2x^2}$

190. $\sqrt{x^2 - y^2} \times \sqrt[4]{x^2 + y^2}$. **191.** $\sqrt[3]{x^2 - 1} \times \sqrt{x^2 + 1}$.

192. $\sqrt[4]{\frac{a^2}{b^3}} \times \sqrt[5]{\frac{b^4}{a^2}}$. **193.** $\sqrt[6]{\frac{m}{np}} \times \sqrt[5]{\frac{n^6p^3}{m^4}}$.

194. $\sqrt[4]{\frac{ab^2}{x^3}} \times \sqrt[6]{\frac{cx^5}{a^2b}}$. **195.** $\sqrt[10]{\frac{m^4x^2}{a^3b}} \times \sqrt[6]{\frac{a^4b^3}{m^3x^4}}$.

196. $(\sqrt{xz^2} - \sqrt[3]{a^2x} + \sqrt[4]{z^3})\sqrt{a^3xz}$.

197. $\left(\sqrt[4]{a^3x} + \sqrt[5]{\frac{x^3}{a^2}} - \sqrt[6]{\frac{1}{a^3x^4}}\right)\sqrt{a^5x^3}$.

198. $(m\sqrt{a^3} - m^2\sqrt[3]{a^4} + m^3\sqrt[4]{a})m\sqrt[5]{a^{15}}$.

199. $(\sqrt[3]{b^2} + 2\sqrt[4]{b^2} - a\sqrt[6]{b^3})a^2\sqrt{b}$.

200. $(\sqrt[5]{x^2} - \sqrt[3]{x^6} + \sqrt[7]{x^3})\sqrt[4]{x^2}$.

201. $\sqrt[5]{a\sqrt[3]{a^2}} \times \sqrt[6]{\sqrt[4]{a^9}} \times \sqrt[3]{a^2\sqrt[8]{a^7}}$. **202.** $(\sqrt{5x^3} + \sqrt[3]{25x} - \sqrt[6]{x^5})^2$.

203. $(\sqrt[5]{z^3} - \sqrt[3]{z} + \sqrt{z^5})^2$. **204.** $(a\sqrt{b^3} - b\sqrt[4]{a^2} - 2\sqrt[3]{ab^4})^2$.

XXVIII

3. Division de radicaux.

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}. \qquad \sqrt[n]{1 : a} = \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}.$$

$$\sqrt[m]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[mn]{a^n} : \sqrt[mn]{b^m} = \sqrt[mn]{\frac{a^n}{b^m}}.$$

Comment divise-t-on deux radicaux de même indice ?
Comment procède-t-on quand ils ont des indices différents ?

Effectuez les opérations suivantes.

1. $\frac{\sqrt{28}}{\sqrt{7}}$. **2.** $\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}}$. **3.** $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$. **4.** $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$. **5.** $\sqrt{32} : \sqrt{2}$.

6. $\sqrt{243} : \sqrt{3}$. **7.** $\sqrt[3]{81} : \sqrt[3]{3}$. **8.** $\sqrt[3]{56} : \sqrt[3]{7}$. **9.** $\sqrt[3]{500} : \sqrt[3]{4}$.

10. $\sqrt[3]{1080} : \sqrt[3]{5}$. **11.** $\dfrac{\sqrt[3]{72}}{\sqrt[3]{9}}$. **12.** $\sqrt[4]{80} : \sqrt[4]{5}$. **13.** $\sqrt[4]{243} : \sqrt[4]{3}$.

14. $\sqrt[4]{4375} : \sqrt[4]{7}$. **15.** $\sqrt[4]{2048} : \sqrt[4]{8}$. **16.** $\sqrt{\frac{1}{2}} : \sqrt{\frac{2}{9}}$.

17. $\sqrt{\frac{5}{6}} : \sqrt{\frac{3}{5}}$. **18.** $\sqrt{\frac{7}{12}} : \sqrt{\frac{3}{7}}$. **19.** $\sqrt{\frac{2}{9}} : \sqrt{\frac{1}{2}}$.

20. $\sqrt{\frac{12}{35}} : \sqrt{\frac{21}{5}}$. **21.** $\sqrt{\frac{14}{15}} : \sqrt{\frac{24}{35}}$. **22.** $\sqrt{\frac{22}{27}} : \sqrt{\frac{6}{11}}$.

23. $\sqrt{\frac{52}{85}} : \sqrt{\frac{17}{65}}$. **24.** $(3\sqrt{6} + 45\sqrt{2}) : 3\sqrt{3}$.

25. $(42\sqrt{5} - 30\sqrt{3}) : 2\sqrt{15}$. **26.** $(84\sqrt{15} + 168\sqrt{6}) : 3\sqrt{21}$.

27. $(15\sqrt{105} - 36\sqrt{10} + 30\sqrt{3}) : 3\sqrt{15}$.

28. $(56\sqrt{30} - 84\sqrt{10} + 100\sqrt{14}) : 4\sqrt{35}$.

29. $(30\sqrt[3]{4} - 36\sqrt[3]{10} + 30\sqrt[3]{90}) : 3\sqrt[3]{20}$.

30. $(50\sqrt[3]{18} + 18\sqrt[3]{20} - 48\sqrt[3]{5}) : 2\sqrt[3]{30}$.

31. $(2 - \sqrt{2}) : (2 + \sqrt{2})$.

---

32. $\sqrt{3a} : \sqrt{a}$. **33.** $\sqrt{2x} : \sqrt{2}$. **34.** $\sqrt{10y} : \sqrt{5y}$.

35. $\sqrt{12m} : \sqrt{6}$. **36.** $\sqrt{5b} : \sqrt{2b}$. **37.** $\sqrt{a^5} : \sqrt{a^3}$.

38. $\sqrt{3a^7} : \sqrt{a^3}$. **39.** $\sqrt{8c^9} : \sqrt{2c^5}$. **40.** $\sqrt{\frac{a^3}{b^5}} : \sqrt{\frac{a}{b^3}}$.

41. $\sqrt{\frac{3}{a^3}} : \sqrt{\frac{6}{a}}$. **42.** $\sqrt[3]{54a^7} : \sqrt[3]{2a}$. **43.** $\sqrt[3]{96n^8} : \sqrt[3]{6n^5}$.

44. $\sqrt[3]{49x^6} : \sqrt[3]{\frac{1}{7}x}$. **45.** $\sqrt[3]{2y} : \sqrt[3]{\frac{1}{4y^2}}$. **46.** $\sqrt[3]{a^2x} : \sqrt[3]{ax^5}$.

47. $\sqrt[4]{125a^7} : \sqrt[4]{\frac{a^2}{5}}$. **48.** $\sqrt[4]{\frac{27}{2}y} : \sqrt[4]{\frac{8y^5}{3}}$.

49. $\sqrt[4]{\frac{54a^3}{y}} : \sqrt[4]{\frac{8y^5}{9a}}$. 50. $\sqrt[4]{\frac{2}{5}m^3} : \sqrt[4]{\frac{5m}{8}}$.

51. $(a - b) : (\sqrt{a} - \sqrt{b})$. 52. $(1 - a) : (1 - \sqrt{a})$.

53. $(b - 1) : (\sqrt{b} - 1)$. 54. $1 : \sqrt{\frac{x + 2y}{x^3 - 3xy^2 + 2y^3}}$.

55. $(acx^2\sqrt{y} - bcy\sqrt{x}) : c\sqrt{xy}$. 56. $(acy^2\sqrt[3]{z^2} - adz\sqrt[3]{y}) : a\sqrt[3]{yz^2}$.

57. $\left(\frac{a}{b}\sqrt{x^5} + (1 - b)\sqrt{x^7} + \left(\frac{c}{b} - \frac{b^2}{a}\right)\sqrt{x^9} + \frac{c}{a}\sqrt{x^{11}}\right) :$
$\left(\frac{1}{b}\sqrt{x^2} + \frac{1}{a}\sqrt{x^4}\right)$.

58. $(h(c - e)\sqrt[3]{y^4} - dh\sqrt[3]{y^5} + cmy^2 - dm\sqrt[3]{y^7} - emy^2) :$
$(h\sqrt[3]{y^3} + m\sqrt[3]{y^5})$.

59. $(apx^2 + aqx^3 - (bp - 3p + 2a)x^4 - (bq - 3q)x^5 +$
$(2b - 6)x^6) : (a\sqrt{x^3} - b\sqrt{x^7} + 3\sqrt{x^7})$.

60. $\left(\frac{2am}{b} - \frac{amx}{b^2}\sqrt[3]{a} + \frac{a^2my}{b^2}\sqrt[3]{\frac{1}{b^2}} + \frac{2a^2n}{b}\sqrt[3]{\frac{1}{b}} - \frac{a^2nx}{b^2}\sqrt[3]{\frac{a}{b}}\right.$
$\left. + (ny + px)\frac{a^3}{b^3} - \frac{2a^2p}{b^2}\sqrt[3]{a^2} - \frac{a^3py}{b^3}\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}}\right) :$
$\left(2\sqrt[3]{\frac{a}{b^2}} - x\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^5}} + y\sqrt[3]{\frac{a^4}{b^7}}\right)$.

61. $\left(0,16x\sqrt[5]{\frac{x^2}{y^3}} + 0,06x\sqrt[5]{\frac{x^3}{y^4}} - \frac{0,59x}{y}\sqrt[5]{x^4} + \frac{0,36x^2}{y}\sqrt[5]{\frac{1}{y}}\right.$
$\left. + \frac{0,18}{y^2}\sqrt[5]{x^2} + \frac{0,27}{y^2}\sqrt[5]{\frac{x^3}{y}} - \frac{0,36}{y^2}\sqrt[5]{\frac{x^4}{y^3}}\right) : \left(0,8\sqrt[5]{\frac{x^6}{y}}\right.$
$\left. - 0,9\sqrt[5]{\frac{x^7}{y^2}} + 0,9\sqrt[5]{\frac{x}{y^8}}\right)$.

62. $\left(\frac{x^3}{y^5}\sqrt{\frac{u}{z}} + \frac{u}{z}\sqrt{\frac{x^3d}{y^5}} - \sqrt{\frac{x^3du}{y^5z}} - \frac{du}{z}\right) : \left(\sqrt{\frac{x^3}{y^5}} + \sqrt{\frac{du}{z}}\right)$.

---

63. $\sqrt{54} : \sqrt[4]{36}$. 64. $\sqrt[3]{9} : \sqrt{3}$. 65. $\sqrt[3]{49} : \sqrt{7}$. 66. $\sqrt[3]{72} : \sqrt{6}$.

67. $\sqrt[3]{12} : \sqrt{6}$. 68. $\sqrt[4]{0,0324} : \sqrt{0,5}$. 69. $\sqrt[6]{0,064} : \sqrt{10}$.

70. $\sqrt[8]{10,4976} : 2\sqrt{5}$. **71.** $\sqrt{\frac{8}{45}} : \sqrt[4]{6\frac{1}{4}}$. **72.** $\sqrt{\frac{3}{5}} : \sqrt[6]{3\frac{3}{8}}$.

73. $\sqrt[5]{\frac{4}{5}} : 2\sqrt[10]{\frac{1}{400}}$. **74.** $\sqrt{27} : 3$. **75.** $\sqrt{196} : 2$.

76. $\sqrt{45} : 3$. **77.** $\sqrt{1452} : 11$. **78.** $6 : \sqrt{24}$. **79.** $8 : \sqrt{72}$.

80. $7 : \sqrt{63}$. **81.** $30 : \sqrt{210}$. **82.** $6 : (3\sqrt{3} - 5)$.

83. $4 : (3\sqrt{2} - 4)$. **84.** $\sqrt{a} : \sqrt[3]{a^2}$. **85.** $\sqrt[3]{b^2} : \sqrt[5]{b^3}$.

86. $\sqrt[3]{m^5} : \sqrt[4]{m^7}$. **87.** $\sqrt{x^3} : \sqrt[9]{x^8}$. **88.** $\sqrt[3]{2x} : \sqrt{x^3}$.

89. $\sqrt[5]{y^4} : \sqrt[7]{2y^3}$. **90.** $\sqrt[6]{\frac{z^9}{27}} : \sqrt{6z^5}$. **91.** $\sqrt[11]{a^5b^9} : \sqrt[7]{a^4b^3}$.

92. $\sqrt[7]{\frac{a^2}{c^3}} : \sqrt[12]{\frac{a^2}{c^8}}$. **93.** $a^2 : \sqrt{a}$. **94.** $b^3 : \sqrt{b}$. **95.** $az^5 : \sqrt{a^2z}$.

96. $3ny^4 : \sqrt{6n^2y}$. **97.** $\sqrt[3]{25m^4x} : 5mx^2$. **98.** $\sqrt[4]{8x^3y^2} : 2x^2y^3$.

99. $\sqrt[6]{1600a^{22}x^{16}} : 5a^2x^4$. **100.** $(x + y) : \frac{1}{3}\sqrt{x^2 - y^2}$.

101. $(3mn\sqrt[2]{n} + 4n^2\sqrt{m}) : 6\sqrt[4]{mn^6}$.

Effectuez les opérations diverses qui suivent.

102. $(\sqrt[-2]{25}$. **103.** $\sqrt[-3]{\frac{1}{64}}$. **104.** $\sqrt[-6]{\frac{64}{15625}}$. **105.** $\sqrt[-4]{36}$.

106. $\sqrt[1]{17}$. **107.** $\sqrt[-1]{6}$. **108.** $\sqrt[-1]{\frac{1}{4}}$. **109.** $\sqrt[-5]{243}$.

110. $\sqrt[-2]{a}$. **111.** $\sqrt[-3]{m^6}$. **112.** $\sqrt[-6]{\frac{m^{14}}{n^{18}}}$. **113.** $\sqrt[-1]{a}$. **114.** $\sqrt[-4]{\frac{a^6}{b^{10}}}$.

115. $\sqrt[-2]{a^3} \times \sqrt[2]{a^5}$. **116.** $\sqrt[3]{m^5} \times \sqrt[-5]{m^3}$. **117.** $\sqrt[-3]{x^5} \times \sqrt[-2]{x^7}$.

118. $\sqrt[-5]{\frac{1}{a^2}} \times \sqrt[-2]{a^3}$. **119.** $\frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt[-2]{a^5}}$. **120.** $\frac{\sqrt[-3]{m^2}}{\sqrt[3]{m^5}}$. **121.** $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[-3]{a}}$.

122. $\frac{\sqrt{x^5}}{\sqrt[-5]{x}}$. **123.** $\frac{\sqrt[-3]{a^2}}{\sqrt[-5]{a^3}}$. **124.** $\sqrt[\frac{3}{4}]{4}$. **125.** $\sqrt[\frac{2}{3}]{12}$. **126.** $\sqrt[\frac{9}{2}]{27}$.

127. $\sqrt[\frac{m}{n}]{a^2}$. 128. $\sqrt[\frac{p}{m}]{a^{\frac{n}{2m}}}$ 129. $\sqrt[-\frac{2}{3}]{75}$. 130. $\sqrt[-\frac{3}{4}]{\frac{5}{6}}$.

131. $\sqrt[-m]{x^{-n}}$. 132. $\sqrt[-3]{125^{-2}}$. 133. $\sqrt[-\frac{2}{3}]{25^{-\frac{3}{4}}}$. 134. $\sqrt[-\frac{p}{r}]{m^{-\frac{q}{s}}}$.

XXIX

4. Élévation de radicaux à une puissance.

$$\left(\sqrt[n]{a^p}\right)^q = \sqrt[n]{a^{pq}}. \qquad \left(\sqrt[n]{a^x}\right)^n = a^x. \qquad \left(\sqrt[mn]{a^p}\right)^n = \sqrt[m]{a^p}.$$

Comment élève-t-on un radical à une puissance?

Si l'indice du radical est un multiple de la puissance à laquelle il faut l'élever, quelle simplification peut-on faire?

Effectuez les opérations suivantes :

1. $(\sqrt{a^3})^2$. 2. $(\sqrt[8]{m^2})^3$. 3. $(\sqrt[5]{n^3})^5$. 4. $(\sqrt[4]{x^3})^4$. 5. $(\sqrt[7]{y^2})^7$.
6. $(\sqrt[9]{ab^2})^9$ 7. $(\sqrt{m^3})^5$. 8. $(\sqrt[8]{n^2})^4$. 9. $(\sqrt[4]{y})^5$. 10. $(\sqrt[3]{b^2c})^4$.
11. $(\sqrt[8]{x^2z^3})^7$. 12. $(\sqrt[3]{2a^4})^2$. 13. $\left(\sqrt{\sqrt[9]{2\frac{14}{25}}}\right)^9$. 14. $\left(\sqrt[8]{\sqrt[7]{27a^6}}\right)^7$.
15. $\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a^{2m}c^m}}\right)^n$. 16. $\left(\sqrt[5]{\sqrt[4]{16a^{17}}}\right)^5$. 17. $(\sqrt[3]{ax^4})^6$.
18. $(\sqrt{(x+y)^3})^4$. 19. $(\sqrt[5]{(x-y)^2})^4$. 20. $(\sqrt[6]{(a^2-b^2)^4})^3$.
21. $(\sqrt[8]{(1+a^2)^6})^3$. 22. $\left(\sqrt[m]{(x^2-y^2)^{2m}}\right)^n$.
23. $(\sqrt[3]{a^2b} - \sqrt{m^3} + \sqrt[4]{ax^3})^2$. 24. $\left(\sqrt[x]{a^2} - \sqrt[y]{b}\right)^2$.
25. $\left(\sqrt[x]{m} - \sqrt[y]{n} + \sqrt[z]{p^2}\right)^2$. 26. $(-\sqrt{2a^3b})^2$. 27. $(-\sqrt[3]{xy^2})^3$.
28. $(-\sqrt[3]{x^2-y^2})^6$. 29. $(-\sqrt[3]{a^2-b^2})^9$. 30. $(-\sqrt{5})^2$.

13. $\frac{2}{4\sqrt{3}}$. **14.** $\frac{7}{2\sqrt{11}}$. **15.** $\frac{2}{\sqrt[3]{4}}$. **16.** $\frac{3}{\sqrt[3]{3}}$. **17.** $\frac{5}{\sqrt[3]{7}}$. **18.** $\frac{4}{\sqrt[3]{6}}$.

19. $\frac{6}{\sqrt[3]{16}}$. **20.** $\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$. **21.** $\frac{10}{\sqrt[3]{5}}$. **22.** $\frac{4}{\sqrt[4]{2}}$. **23.** $\frac{5}{\sqrt[4]{6}}$. **24.** $\frac{8}{\sqrt[4]{12}}$.

25. $\frac{10}{\sqrt[4]{15}}$. **26.** $\frac{23}{\sqrt[4]{3}}$. **27.** $\frac{15}{\sqrt[4]{3}}$. **28.** $\frac{17}{\sqrt[4]{5}}$. **29.** $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt[3]{4}}$. **30.** $\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[4]{2}}$.

31. $\frac{5\sqrt[5]{8}}{\sqrt{3}}$. **32.** $\frac{7\sqrt{5}}{\sqrt[4]{6}}$. **33.** $\frac{9\sqrt[6]{49}}{2\sqrt[3]{21}}$. **34.** $\frac{\sqrt[8]{36}}{\sqrt[4]{12}}$. **35.** $\frac{2\sqrt[5]{3}}{\sqrt[10]{2}}$.

36. $\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$. **37.** $\frac{11}{\sqrt{8}-\sqrt{7}}$. **38.** $\frac{6}{\sqrt{12}+\sqrt{5}}$. **39.** $\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

40. $\frac{3}{\sqrt{10}-\sqrt{6}}$. **41.** $\frac{2}{3+\sqrt{2}}$. **42.** $\frac{7}{1-\sqrt{5}}$. **43.** $\frac{3}{5-\sqrt{10}}$.

44. $\frac{4}{6-2\sqrt{3}}$. **45.** $\frac{12}{4+3\sqrt{2}}$. **46.** $\frac{13}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$. **47.** $\frac{14}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}$.

48. $\frac{18}{\sqrt{7}-\sqrt{9}}$. **49.** $\frac{20}{\sqrt{9}-\sqrt{5}}$. **50.** $\frac{8\sqrt{6}}{\sqrt{24}-\sqrt{14}}$.

51. $\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$. **52.** $\frac{21\sqrt{3}}{4\sqrt{3}-3\sqrt{2}}$. **53.** $\frac{120\sqrt{2}}{5\sqrt{6}+3\sqrt{10}}$.

54. $\frac{75\sqrt{14}}{8\sqrt{2}+2\sqrt{7}}$. **55.** $\frac{1200\sqrt{10}}{12\sqrt{5}-4\sqrt{7\frac{1}{2}}}$. **56.** $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$.

57. $\frac{\sqrt{11}+\sqrt{5}}{\sqrt{11}-\sqrt{5}}$. **58.** $\frac{\sqrt{13}-\sqrt{10}}{\sqrt{13}+\sqrt{10}}$. **59.** $\frac{\sqrt{8}+\sqrt{7}}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}$.

60. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{10}}{\sqrt{10}-\sqrt{6}}$. **61.** $\frac{3+5\sqrt{3}}{4-3\sqrt{2}}$. **62.** $\frac{1-4\sqrt{5}}{6+2\sqrt{3}}$.

63. $\frac{7-3\sqrt{10}}{5+4\sqrt{5}}$. **64.** $\frac{2+2\sqrt{2}}{6+5\sqrt{6}}$. **65.** $\frac{7+3\sqrt{7}}{12-6\sqrt{11}}$.

66. $\frac{30}{2-\sqrt{3}+\sqrt{5}}$. **67.** $\frac{12}{3+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$. **68.** $\frac{42}{5-2\sqrt{3}+\sqrt{7}}$.

69. $\frac{18}{4+3\sqrt{2}+5\sqrt{3}}$. **70.** $\frac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$.

71. $\frac{2+\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2-\sqrt{6}+\sqrt{2}}$. **72.** $\frac{3-\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3+\sqrt{5}+\sqrt{2}}$.

73. $\frac{7-2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{3+3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}$. **74.** $\frac{2\sqrt{3}-3\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{6}}$.

75. $\frac{\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{10}}$. **76.** $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{10}+\sqrt{6}-\sqrt{5}-\sqrt{2}}$.

---

77. $\frac{a}{\sqrt{a}}$. **78.** $\frac{b^2}{\sqrt{b}}$. **79.** $\frac{d^3}{\sqrt{d^5}}$. **80.** $\frac{1}{\sqrt{m^3}}$. **81.** $\frac{3x^2}{\sqrt{6x^5}}$.

82. $\frac{m}{\sqrt[3]{m^2}}$. **83.** $\frac{a}{\sqrt[4]{a^5}}$. **84.** $\frac{c}{\sqrt[m]{c^{m-1}}}$. **85.** $\frac{x}{\sqrt[p]{x}}$. **86.** $\frac{a^3}{\sqrt[5]{a^2}}$.

87. $\frac{b^7}{\sqrt[6]{b^3}}$. **88.** $\frac{m^5}{n\sqrt{m^3}}$. **89.** $\frac{c}{d\sqrt{c^3}}$. **90.** $\frac{d^3}{d\sqrt[3]{d}}$. **91.** $\frac{m+n}{\sqrt{m+n}}$.

92. $\frac{x^2-1}{\sqrt{x-1}}$. **93.** $\frac{a^2-b^2}{\sqrt{a+b}}$. **94.** $\frac{b+c}{\sqrt{b-c}}$. **95.** $\frac{x-y}{\sqrt{x+y}}$.

96. $\frac{a-b}{\sqrt{a^2-b^2}}$. **97.** $\frac{a+b}{\sqrt{a^2-b^2}}$. **98.** $\frac{(m+n)^2}{\sqrt{m^2-n^2}}$. **99.** $\frac{a}{a-2\sqrt{a}}$.

100. $\frac{b}{1-\sqrt{b}}$. **101.** $\frac{b+1}{b-\sqrt{b}}$. **102.** $\frac{x}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$. **103.** $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

104. $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$. **105.** $\frac{\sqrt{m}-\sqrt{2}}{\sqrt{m}+\sqrt{2}}$. **106.** $\frac{\sqrt{z^3}-2}{2+\sqrt{z^3}}$. **107** $\frac{\sqrt{a^5}+1}{1-\sqrt{a^5}}$.

108. $\frac{3+2\sqrt{a^3}}{2\sqrt{a^3}-3}$. **109.** $\frac{3+2\sqrt{d^7}}{4+3\sqrt{d^7}}$. **110.** $\frac{a+b\sqrt{y}}{d-c\sqrt{y}}$. **111.** $\frac{4+2\sqrt{z}}{3-4\sqrt{z}}$.

112. $\dfrac{a\sqrt{u} + b\sqrt{v}}{c\sqrt{u} - d\sqrt{v}}$. 113. $\dfrac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{c\sqrt{x} - d\sqrt{y}}$.

114. $\dfrac{2}{\sqrt{a^2 + b} + \sqrt{a^2 - b}}$. 115. $\dfrac{2m}{\sqrt{a + m} + \sqrt{a - m}}$.

116. $\dfrac{1}{x\sqrt{1 - a^2} - y\sqrt{1 + a^2}}$. 117. $\dfrac{5}{a\sqrt{x^2 - 1} - b\sqrt{x^2 + 1}}$.

118. $\dfrac{\sqrt{a + b} + \sqrt{a - b}}{\sqrt{a + b} - \sqrt{a - b}}$. 119. $\dfrac{a\sqrt{x - y} - b\sqrt{x + y}}{a\sqrt{x - y} + b\sqrt{x + y}}$.

120. $\dfrac{\sqrt{a^2 - b^2} - \sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 - b^2} + \sqrt{a^2 + b^2}}$. 121. $\dfrac{\sqrt{1 + x^3} - \sqrt{1 - x^3}}{\sqrt{x^3 + 1} + \sqrt{1 - x^3}}$.

122. $\dfrac{m\sqrt{1 - y^2} + n\sqrt{1 + y^2}}{\sqrt{1 - y^2} - \sqrt{y^2 + 1}}$. 123. $\dfrac{2\sqrt{1 - b^2} - 3\sqrt{1 - c^2}}{\sqrt{1 - b^2} + \sqrt{1 - c^2}}$.

124. $\dfrac{x\sqrt{m^3 + n^2} + y\sqrt{m^3 - n^2}}{x\sqrt{m^3 - n^2} + y\sqrt{m^3 + n^2}}$.

125. $\dfrac{\sqrt{(2 + x)(2 + y)} - \sqrt{(2 - x)(2 - y)}}{\sqrt{(2 + x)(2 + y)} + \sqrt{(2 - x)(2 - y)}}$.

126. $\dfrac{\sqrt{(x + \alpha)(y + \beta)} + \sqrt{(x - \alpha)(y - \beta)}}{\sqrt{(x + \alpha)(y + \beta)} - \sqrt{(x - \alpha)(y - \beta)}}$.

127. $\dfrac{\sqrt{(1 - x)(1 - y)} - \sqrt{(1 + x)(1 + y)}}{\sqrt{(1 - x)(1 - y)} + \sqrt{(1 + x)(1 + y)}}$.

128. $\dfrac{\sqrt{a + \alpha} + \sqrt{a - \alpha} - \sqrt{a + \beta} + \sqrt{a - \beta}}{\sqrt{a + \alpha} - \sqrt{a - \alpha} + \sqrt{a + \beta} - \sqrt{a - \beta}}$.

129. $\dfrac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{y^2 + 1} + \sqrt{y^2 - 1}}{\sqrt{y^2 + 1} + \sqrt{y^2 - 1} + \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}}$.

130. $\dfrac{\sqrt{m + 1} - \sqrt{m - 1} + \sqrt{p + 1} - \sqrt{p - 1}}{\sqrt{m + 1} - \sqrt{m - 1} - \sqrt{p + 1} - \sqrt{p - 1}}$.

131. $\dfrac{\sqrt{\beta-1}+\sqrt{\beta+1}+\sqrt{\delta-1}+\sqrt{\delta+1}}{\sqrt{\beta-1}-\sqrt{\beta+1}-\sqrt{\delta-1}-\sqrt{\delta+1}}$.

132. $\dfrac{8}{\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}}$. 133. $\dfrac{11}{\sqrt{3}+\sqrt[4]{5}}$. 134. $\dfrac{m-n}{\sqrt{a}-\sqrt[3]{b^2}}$.

135. $\dfrac{a-1}{\sqrt{a}+\sqrt[3]{b}}$. 136. $\dfrac{a+b}{\sqrt{x^3}+\sqrt[3]{y^2}}$. 137. $\dfrac{1}{m^2(\sqrt{m^5}+\sqrt[3]{y^5})}$.

138. $\dfrac{x^2+2y}{\sqrt[4]{x^3}-\sqrt{y}}$. 139. $\dfrac{n^2}{\sqrt{a}+\sqrt[8]{b^3}}$. 140. $\dfrac{3}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[4]{b}}$.

XXXII

7. Calcul des imaginaires.

Les quantités ordinaires, rapportées à l'unité 1, sont appelées *réelles*. L'expression $\sqrt{-n}$, qui peut toujours être ramenée à la forme $a\sqrt{-1}$, est ce qu'on appelle une quantité *imaginaire pure*, rapportée à une autre unité, $\sqrt{-1}$, que Gauss a désignée par i. Cette notation est généralement adoptée aujourd'hui.

Les quantités de la forme $a \pm b\sqrt{-1}$, où a et b sont réels, ont été nommées par Cauchy *quantités complexes*, par Gauss *nombres latéraux*, par Mourey *nombres dirigés*. Deux quantités complexes qui ne diffèrent que par le signe de la partie imaginaire, sont dites *conjuguées;* telles sont $a+b\sqrt{-1}$ et $a-b\sqrt{-1}$. Le *module*, ou la *valeur absolue* d'une quantité complexe $a \pm b\sqrt{-1}$, est l'expression $\sqrt{a^2+b^2}$, qui est toujours réelle et positive.

L'imaginaire $a+b\sqrt{-1}$ peut s'écrire :

$$\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sqrt{-1}\right).$$

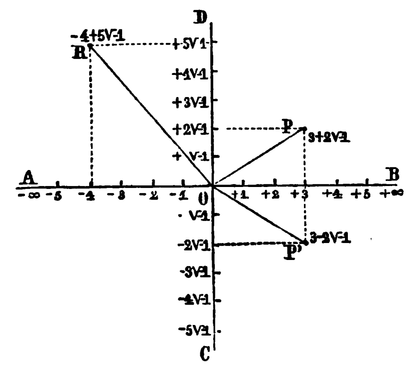
Or la somme des carrés de $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ étant tou-

jours égale à 1, on peut poser

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\alpha \qquad \text{et} \qquad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\alpha.$$

Si alors on pose $\sqrt{a^2+b^2} = M$, la quantité complexe prend la forme $M(\cos\alpha + \sin\alpha\sqrt{-1})$. L'angle α est dit l'*argument* ou la *déviation* de la quantité complexe ; Mourey le nomme le *verseur*.

Voici par quelles conventions on représente géométriquement les quantités complexes. Sur un axe AB, prenons O pour origine et convenons que les longueurs portées dans le sens de B représenteront les nombres positifs, et celles qui iront de O vers A, les nombres négatifs. La ligne AB pourra représenter toutes les quantités *réelles :* c'est l'*axe réel*. Si l'on mène sur ce dernier, par le point O, une perpendiculaire DC, on pourra compter sur celle-ci les unités imaginaires : les positives de O en D, les négatives en sens contraire. La droite OP représentera alors $3 + 2\sqrt{-1}$.



Par cette convention, les quantités complexes sont représentées par des lignes partant de O et se terminant en des points en dehors de AB et des deux côtés, d'où le nom de *nombres latéraux* donné aux quantités complexes. Celles-ci restent dans le plan, qu'elles remplissent tout entier. La droite $OP = \sqrt{a^2+b^2}$, représente le module de la quantité complexe ; l'angle POB, compté à partir de OB et dans le sens BD, est l'argument. La droite OP est ainsi déterminée non-seulement en grandeur mais en direction.

Quoique *Bombelli* ait déjà exposé dans son *Algebra* (1579) le calcul des imaginaires de la forme $a + b\sqrt{-1}$, c'est à *Euler* (1707-1783) que revient le mérite d'avoir introduit l'usage des imaginaires en algèbre.

Mais pendant quelque temps, la théorie de ces quantités ne présentant pas toute la rigueur désirable, on n'admettait qu'après confirmation par une autre voie les découvertes auxquelles on était arrivé par le secours des quantités complexes.

Le premier essai de représentation géométrique de ces quantités fut tenté en 1750 par *Henri Kühn* (1690-1769) de Königsberg. L'abbé *Buée* proposa le premier, en 1806, de représenter les unités imaginaires sur un axe perpendiculaire à l'axe réel. La même année, *Robert Argand*, de Genève, applique la nouvelle théorie à la démonstration de quelques théorèmes. *Mourey*, en France, et *John Warren*, en Angleterre, publièrent en 1828 des opuscules qui renferment la théorie élémentaire de la représentation géométrique des quantités complexes Mais c'est à *Gauss* qu'on doit la précision que cette théorie offre aujourd'hui, et c'est lui qui a donné aux quantités complexes droit de cité dans la science. Son élève *Riemann* fut conduit par l'emploi des imaginaires à des découvertes fort importantes. *Cauchy* fit aussi faire de grands progrès à la nouvelle théorie. *Legendre*, *Abel*, *Jacobi* employèrent les quantités complexes dans l'étude des fonctions elliptiques.

$$\sqrt{-1} = i \qquad i^{4n+1} = \sqrt{-1}$$

$$(\sqrt{-1})^2 = i^2 = -1. \qquad i^{4n+2} = -1$$

$$(\sqrt{-1})^3 = i^3 = -\sqrt{-1} \qquad i^{4n+3} = -\sqrt{-1}$$

$$(\sqrt{-1})^4 = i^4 = +1. \qquad i^{4n+4} = +1.$$

$$(\sqrt{-a})^2 = -a \qquad \sqrt{-a} : \sqrt{-b} = \sqrt{a:b}$$

$$\sqrt{-a^2} = a\sqrt{-1} \qquad \sqrt{-a} : \sqrt{b} = \sqrt{\frac{a}{b}}\sqrt{-1}$$

$$\sqrt{-a}\,\sqrt{-b} = \sqrt{ab}\,(\sqrt{-1})^2 \qquad \sqrt{a} : \sqrt{-b} = -\sqrt{\frac{b}{a}} \times \sqrt{-1}.$$

$$= -\sqrt{ab}.$$

Si l'on égale l'une à l'autre deux quantités de la forme $a + b\sqrt{-1}$, qu'est-ce que cela suppose des quantités réelles et des quantités imaginaires?

Mettez les quantités suivantes sous la forme $a\sqrt{-1}$.

1. $\sqrt{-4}$. **2.** $\sqrt{-25}$. **3.** $\sqrt{-81}$. **4.** $\sqrt{-144}$.

5. $\sqrt{-a^2}$. **6.** $\sqrt{-b^4}$. **7.** $\sqrt[4]{-16}$. **8.** $\sqrt[4]{-81}$.

9. $\sqrt[4]{-625}$. **10.** $\sqrt[6]{-64}$. **11.** $\sqrt[6]{-729}$. **12.** $\sqrt[8]{-256}$.

13. $\sqrt[4]{-x^8}$. **14.** $\sqrt[4]{-y^9}$. **15.** $\sqrt[6]{-z^{18}}$. **16.** $\sqrt[10]{-u^{20}}$.

17. $\sqrt{-\frac{1}{4}}$. **18.** $\sqrt{-\frac{a^4}{b^2}}$. **19.** $\sqrt{-x^2-y^2}$.

20. $\sqrt[4]{-(x^2+y^2)^2}$. **21.** $\sqrt[6]{-(3x-2y^2)^{12}}$. **22.** $\sqrt{-9x^6}$.

23. $\sqrt{-81m^6}$.

24. Quelle est la valeur de : $(\sqrt{-1})^6$; $(\sqrt{-1})^8$; $(\sqrt{-1})^{36}$; $(\sqrt{-1})^{16}$; $(\sqrt{-1})^{21}$; $(\sqrt{-1})^{27}$; $(\sqrt{-1})^{51}$?

25. Quelle est la valeur de i^7; i^{11}; i^{28}; i^{32}; i^{14}; i^{13}; i^{38}?

Additionnez :

26. $\sqrt{-25}+\sqrt{-49}+\sqrt{-121}-\sqrt{-64}+\sqrt{-1}-\sqrt{-36}$.

27. $\sqrt{-a^4}+\sqrt{-a^2}-\sqrt{-4a^4}+\sqrt{-16a^4}-\sqrt{-81a^2}+\sqrt{-a^2}$.

28. $\sqrt{-(x-y)^2}$; $\sqrt{-(x^2-2xy+y^2)}$; $+\sqrt{-64x^2y^2}$.

29. $\sqrt{-25a^6}$; $\sqrt{-16a^6}$; $-\sqrt{-(a-1)^2a^6}$.

30. $\sqrt{-(m-n)^2}$; $-\sqrt{-(n-2m)^2}$; $\sqrt{-4m^2n^2}$; $-\sqrt{-4(m-n)^2}$.

31. $5+\sqrt{-16}$; $3-\sqrt{-4}$; $8+\sqrt{-4}$; $-(7+\sqrt{-36})$; $2-\sqrt{-1}$.

32. $a+bi$; $2a+3bi$; $\frac{1}{2}a-4bi$; $5a-\frac{1}{2}bi$; $4a-16bi$.

33. $3+2i$; $4-2i$; $7+3i$; $8-i$; $4+2bi$.

Multipliez :

34. $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a}$ [1]. **35.** $\sqrt{-16} \times \sqrt{-9}$.

36. $\sqrt{-m} \times \sqrt{-n}$. **37.** $\sqrt{-y} \times \sqrt{-1}$.

38. $\sqrt{25} \times \sqrt{-49}$. **39.** $\sqrt{a^8} \times \sqrt{-a^4}$.

40. $\sqrt{-9y^2} \times \sqrt{-16z^6}$. **41.** $\sqrt{-m^2} \times (-\sqrt{-9m^4})$.

42. $i\sqrt{-z^2}$. **43.** $i\sqrt{-36} \times \sqrt{25}$. **44.** $i\sqrt{-28} \times i\sqrt{-32}$.

45. $i^2\sqrt{-49} \times \sqrt{-121}$. **46.** $\sqrt{-(a+b)} \times \sqrt{-(a-b)}$.

47. $\sqrt{x-y} \times \sqrt{y-x}$. **48.** $\sqrt{y-5} \times \sqrt{5-y}$.

49. $i\sqrt{-9} \times \sqrt{2-y}$. **50.** $(a+\sqrt{-1})(a-\sqrt{-1})$.

51. $(m+bi)(m-bi)$. **52.** $(3+5i)(4-7i)$.

53. $(x+2i)(y-bi)$. **54.** $(3x-8i)(2y+3i)$.

55. $(2a+3bi)(c-di)$. **56.** $(4-i\sqrt{8})(3+i\sqrt{2})$.

57. $(m-3i\sqrt{b})(n+4i\sqrt{c})$. **58.** $(\sqrt{5}+i\sqrt{6})(\sqrt{6}-i\sqrt{8})$.

59. $(\sqrt{8}-i\sqrt{12})(\sqrt{2}+i\sqrt{3})$. **60.** $(ai+x)(ai-x)$.

61. $(\sqrt{x}+i\sqrt{y})(\sqrt{x}-i\sqrt{y})$. **62.** $(\sqrt{a+i})(\sqrt{a-i})$.

63. $(\sqrt{1+i})(\sqrt{1-i})$. **64.** $(\sqrt{5+4i})(\sqrt{5-4i})$.

65. $\left(\sqrt{5+i\sqrt{11}}\right)\left(\sqrt{5-i\sqrt{11}}\right)$. **66.** $\left(\sqrt{9+i\sqrt{19}}\right)\left(\sqrt{9-i\sqrt{19}}\right)$.

67. $(3-4\sqrt{-1})^2$. **68.** $(6-7\sqrt{-1})^2$. **69.** $(a+bi)^2$.

(1) Il se présente ici une difficulté embarrassante au premier abord. Si l'on effectue le calcul conformément aux règles sur la multiplication des radicaux, on trouve : $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a} = \sqrt{(-a)(-a)} = \sqrt{a^2} = \pm a$, tandis que si l'on considère le produit comme le carré de $\sqrt{-a}$, on obtient seulement $-a$. Pour résoudre cette difficulté, il suffit de rappeler qu'en introduisant l'imaginaire $\sqrt{-a}$, on l'a fait avec la convention restrictive que son carré serait $-a$, comme le carré de $\sqrt{-1}$ est -1, d'après la même convention, qu'il ne faut jamais oublier dans le calcul des imaginaires. Du reste, les calculs de ce genre deviennent bien plus simples si, à la place de $\sqrt{-1}$ on écrit i. Le numéro 34 ci-dessus donnera $i\sqrt{a} \times i\sqrt{a} = i^2a = -a$. On voit ainsi que la solution $+a$ doit être rejetée.

7 $(x^2 - c^3i)^2$. **71.** $(m^3 + x\sqrt{-1})^2$. **72.** $(2y^3 - 3zi)^2$.

73. $(1 + 2ai)^2$. **74.** $(\sqrt{e} - \sqrt{-e})^2$. **75.** $(\sqrt{n^2} + \sqrt{-e^3})^2$.

76. $(\sqrt{z^3} - i\sqrt{z})^2$. **77.** $(\sqrt{5} + i\sqrt{-a})^2$.

78. $(a + \sqrt{-a} - \sqrt{-a^3})^2$. **79.** $(x^2 - \sqrt{-x} + \sqrt{-2x})^2$.

80. $(2a - 3\sqrt{-1} - i\sqrt{-b})^2$. **81.** $(ai + bi + ci)^2$.

82. $(x^3i - x^2i + xi)^2$. **83.** $\left(c^2i + ci - \frac{i}{c}\right)^2$.

84. $(0{,}2i + 0{,}5ai - 2i)^2$. **85.** $(0{,}5a^2i - 0{,}2a + 0{,}1i)^2$.

86. $(mi + ni - p)^2$. **87.** $(xi + yi)^3$. **88.** $(ai - bi)^3$.

89. $(ci - di)^3$. **90.** $(v + zi)^3$. **91.** $(m^2i - n^3)^3$.

92. $(p^3 + r^4i)^3$. **93.** $(2a - 3bi)^3$. **94.** $\left(\frac{b}{2}i + \frac{1}{c}\right)^3$.

95. $(x + yi)^4 - (x - yi)^4$. **96.** $(m + ni)^5 + (m - ni)^5$.

97. $(1 + i\sqrt{3})^5 + (1 - i\sqrt{3})^5$. **98.** $(a - i)^6 - (a + i)^6$.

99. $(1 - ai)^4 - (1 + ai)^5$. **100.** $(a + bi)^4 + (a - bi)^3$.

101. $\left\{-\frac{1}{2}\sqrt[3]{a} + \sqrt{-\frac{3}{4}\sqrt[3]{a^2}}\right\}^3$.

102. $\frac{1}{1024}\left\{-1 + \sqrt{5} \pm \sqrt{-10 - 2\sqrt{5}}\right\}^5$.

Effectuez les divisions suivantes :

103. $\frac{a}{\sqrt{-1}}$. **104.** $\frac{b}{\sqrt{-b^2}}$. **105.** $\frac{d}{\sqrt{-4}}$. **106.** $\frac{\sqrt{-9}}{\sqrt{-3}}$.

107. $\frac{\sqrt{-m}}{\sqrt{-n}}$. **108.** $\frac{\sqrt{-ax}}{\sqrt{-x}}$. **109.** $\frac{x}{\sqrt{-x}}$. **110.** $\frac{z}{\sqrt{-z^2}}$.

111. $\frac{m}{i\sqrt{m}}$. **112.** $\frac{\sqrt{-x^2}}{\sqrt{-x}}$. **113.** $\frac{\sqrt{-8}}{\sqrt{-2}}$. **114.** $\frac{\sqrt{-10m^3}}{\sqrt{-5m}}$.

115. $\frac{bi}{\sqrt{-b}}$. **116.** $\frac{m^2i^3}{\sqrt{-m^2}}$. **117.** $\frac{p^3i^4}{i\sqrt{-p^5}}$. **118.** $\frac{c^3}{i\sqrt{-c^3}}$.

119. $\dfrac{di^2}{\sqrt{-d^3}}$. 120. $\dfrac{\sqrt{y-1}}{\sqrt{-(1-y)}}$. 121. $\dfrac{a^2+b^2}{a-b\sqrt{-1}}$.

122. $\dfrac{x^2-y^2}{x+y\sqrt{-1}}$. 123. $\dfrac{m+n}{\sqrt{m}+\sqrt{n}\sqrt{-1}}$.

124. $(-\sqrt{ac}+i\sqrt{bc}+\sqrt{cm}+a-i\sqrt{ab}-\sqrt{am}):$
$(i\sqrt{c}-i\sqrt{a})$.

125. $(ix\sqrt{y}+y\sqrt{xy}-\sqrt{xyz}+y\sqrt{x}-iy^2+iy\sqrt{z}-i\sqrt{xz}$
$-y\sqrt{z}+z):(\sqrt{x}-iy+i\sqrt{z})$.

Faites disparaître les imaginaires du dénominateur dans les fractions suivantes :

126. $\dfrac{2}{3+\sqrt{-2}}$. 127. $\dfrac{56}{1+\sqrt{-7}}$. 128. $\dfrac{36}{7+2\sqrt{-5}}$.

129. $\dfrac{2i}{3+2i\sqrt{-6}}$. 130. $\dfrac{1-2i\sqrt{3}}{1+2i\sqrt{3}}$. 131. $\dfrac{3-5i\sqrt{8}}{3+5i\sqrt{8}}$.

132. $\dfrac{5-7i\sqrt{2}}{5+7i\sqrt{2}}$. 133. $\dfrac{1+i}{1-i^2}$. 134. $\dfrac{a+bi}{a-bi}$.

135. $\dfrac{a+i\sqrt{x}}{a-i\sqrt{x}}$. 136. $\dfrac{x+iz}{(x-iz)^2}$. 137. $\dfrac{1-i^3}{(1-i)^3}$.

138. $\dfrac{\sqrt{-x}+\sqrt{-y}}{\sqrt{-x}-\sqrt{-y}}$. 139. $\dfrac{mi-n}{m+ni}$. 140. $\dfrac{1}{1-i}+\dfrac{1}{1+i}$.

141. $\dfrac{1}{(1-i)^6}$. 142. $\dfrac{1-i}{1+i}+\dfrac{1+i}{1-i}$.

143. $\dfrac{a+2i}{a-2i}+\dfrac{a-2i}{a+2i}$. 144. $\dfrac{x-i\sqrt{y}}{x+i\sqrt{y}}$.

145. $\dfrac{\sqrt{-(1-x)}+\sqrt{-(1+x)}}{\sqrt{-(1+x)}-\sqrt{-(1-x)}}$.

146. $\dfrac{\sqrt{-(1+i)} - i\sqrt{-(1-i)}}{\sqrt{-(1-i)} + i\sqrt{-(1+i)}}$.

147. $\dfrac{\sqrt{x+i\sqrt{y}} + \sqrt{x-i\sqrt{y}}}{\sqrt{x+i\sqrt{y}} - \sqrt{x-i\sqrt{y}}}$.

148. $\dfrac{\sqrt{x+i\sqrt{x^2-b^2}} + \sqrt{x-i\sqrt{x^2-b^2}}}{\sqrt{x+i\sqrt{x^2-b^2}} - \sqrt{x-i\sqrt{x^2-b^2}}}$.

Effectuez les opérations suivantes et simplifiez les résultats.

149. $a^{\sqrt{-1}} \times a^{\sqrt{-1}}$.

150. $a^{3\sqrt{-1}} \times a^{2\sqrt{-1}}$.

151. $x^{-5\sqrt{-1}} \times x^{2\sqrt{-1}}$.

152. $m^{3\sqrt{-1}} \times m^{-4}$.

153. $x^{-2} \times x^{-3\sqrt{-1}}$.

154. $a^{-3\sqrt{-1}} \times a^{4\sqrt{-1}}$.

155. $m^{-5\sqrt{-1}} \times m^{-3\sqrt{-1}}$.

156. $a^{3\sqrt{-1}} : a^{4\sqrt{-1}}$.

157. $a^{m\sqrt{-1}} : a^{-n\sqrt{-1}}$.

158. $a^{-p\sqrt{-1}} : a^{-2\sqrt{-1}}$.

159. $\left(a^{2\sqrt{-1}}\right)^2$.

160. $\left(x^{2\sqrt{-1}}\right)^{4\sqrt{-1}}$.

161. $\left(m^{-5\sqrt{-1}}\right)^{-3\sqrt{-1}}$.

162. $a^{m-n\sqrt{-1}} \times a^{2+n\sqrt{-1}}$.

163. $\left(x^{a+b\sqrt{-1}}\right)^{a-b\sqrt{-1}}$.

164. $x^{a+b\sqrt{-1}} \times x^{a-b\sqrt{-1}}$.

Quelle est la valeur numérique de :

165. $3^{2+3\sqrt{-1}} \times 3^{2-3\sqrt{-1}}$.

166. $7^{4-7\sqrt{-1}} : 7^{2-7\sqrt{-1}}$.

167. $\left(6^{2+3\sqrt{-1}}\right)^{2-3\sqrt{-1}}$.

168. $\left(5^{3\sqrt{-1}}\right)^{-2\sqrt{-1}}$.

169. $\left(8^{-5\sqrt{-1}}\right)^{-\sqrt{-1}}$.

170. $\left(2^{3\sqrt{-1}}\right)^{4\sqrt{-1}}$.

III. RACINE CARRÉE ET RACINE CUBIQUE (*)

XXXIII

1. Racine carrée des nombres.

$$\text{I.}\quad \sqrt{a^2 \pm 2ab + b^2} = a \pm b.$$

$$\text{II.}\quad \sqrt{a^2 \pm r} = a \pm \frac{r}{2a} \text{ quand } r \text{ est très petit par rapport à } a.$$

$$\text{III.}\quad \sqrt{\text{N}} \text{ à } \frac{1}{b} \text{ près} = \frac{\sqrt{\text{N}b^2}}{b};\ (\sqrt{\text{N}b^2} \text{ est calculé à une unité près}).$$

$$\text{IV.}\quad \sqrt{\text{N}} \text{ à } \frac{1}{100} \text{ près} = \frac{\sqrt{10000\,\text{N}}}{100}.$$

Extraire la racine carrée des nombres suivants, et indiquer le reste s'il y en a un.

1. 961. **2.** 729. **3.** 3 136. **4.** 4 096. **5.** 5 625. **6.** 6 889.
7. 9 409. **8.** 5 184. **9.** 7 569. **10.** 3 481. **11.** 1 764.
12. 8 649. **13.** 289. **14.** 1 444. **15.** 3 025. **16.** 9 801.
17. 13 225. **18.** 15 376. **19.** 45 369. **20.** 106 929.
21. 258 064. **22.** 115 600. **23.** 522 729. **24.** 380 689.
25. 223 729. **26.** 729 316. **27.** 24 964. **28.** 60 516.
29. 139 876. **30.** 167 281. **31.** 388 129. **32.** 617 796.
33. 700 569. **34.** 824 464. **35.** 516 976. **36.** 32 041.
37. 65 536. **38.** 316 969. **39.** 287 296. **40.** 107 584.

(*) Les Hindous possédaient déjà des méthodes pour l'extraction de la racine carrée et cubique. *Omar Alkhayyâmi* (milieu du XIe siècle) démontra l'exactitude de ces méthodes, et enseigna de plus à trouver les racines des degrés supérieurs (*Algèbre d'Omar Alkhayyâmi*, traduite par Woepcke. p. 13. — Paris 1851).

41. 67 848 169. **42.** 6 031 936. **43.** 21 095 649.
44. 1 651 225. **45.** 45 441 081. **46.** 65 999 376.
47. 57 942 544. **48.** 81 685 444. **49.** 9 084 196.
50. 3 204 100. **51.** 6 036 849. **52.** 25 482 304.
53. 23 980 609. **54.** 97 377 424. **55.** 53 319 204.
56. 48 385 936. **57.** 49 154 121. **58.** 1 226 960 784.
59. 7 923 560 857. **60.** 6 380 654 641. **61.** 9 607 724 361.
62. 4 836 924 304. **63.** 5 602 951 436. **64.** 8 051 032 528.
65. 1 377 968 641. **66.** 8 119 271 449. **67.** 466 905 664.
68. 2 394 634 225. **69.** 2 831 729 796. **70.** 373 335 664 144.
71. 106 444 282 564. **72.** 61 607 707 681. **73.** 491 971 779 649.
74. 250 109 011 881. **75.** 189 946 917 241. **76.** 979 682 264 521.
77. 9 832 093 970 689. **78.** 17 532 074 385 424.
79. 27 467 399 674 225. **80.** 1 024 212 817 156.
81. 90 322 347 493 249. **82.** 6 868 325 321 001.
83. 2 396 304 (1). **84.** 2 253 875 625. **85.** 4 865 062 500.
86. 1 049 760 000. **87.** $\sqrt[4]{10\,617\,447\,681}$. **88.** $\sqrt[4]{69\,257\,922\,561}$.
89. $\sqrt[4]{30\,237\,384\,321}$. **90.** $\sqrt[8]{282\,429\,536\,481}$.
91. $\sqrt[8]{1\,785\,793\,904\,896}$.

---

92. $\frac{1\,369}{25}$. **93.** $\frac{2\,601}{196}$. **94.** $\frac{4\,624}{1\,296}$. **95.** $\frac{1\,681}{6\,889}$. **96.** $\frac{1\,156}{225}$.
97. $\frac{5\,329}{324}$. **98.** $\frac{256}{2\,809}$. **99.** $\frac{441}{17\,424}$. **100.** $\frac{576}{45\,369}$. **101.** $\frac{99\,856}{784}$.
102. $10\,955^1/_9$. **103.** $750\frac{19}{25}$. **104.** $2\,997\frac{9}{16}$. **105.** $1\,230\frac{121}{144}$.
106. $552\frac{1}{4}$. **107.** $29\frac{23}{49}$. **108.** $3\,211\frac{1}{9}$. **109.** $5\,833\frac{9}{64}$. **110.** $14\,121\frac{18}{36}$.
111. $29\,355\frac{1}{9}$. **112.** 0,136 9. **113.** 0,336 4. **114.** 0,448 9.
115. 0,264 196. **116.** 0,665 856. **117.** 0,029 241. **118.** 0,010 816.

(1) Il peut y avoir avantage dans certains cas à décomposer le nombre en facteurs qui soient des carrés parfaits. Ainsi $13325 = 9^2 \times 5^2 \times 169$ et $\sqrt{13325} = 9 \times 5 \times \sqrt{169}$. On pourra appliquer cette méthode en particulier aux exemples 83 à 86 inclusivement.

119. 0,097 344. **120.** 0,000 985 96. **121.** 0,003 969.
122. 0,000 001 96. **123.** 0,000 187 69. **124.** 0,000 475 24.
125. 0,000 086 49. **126.** 0,007 396.

Calculez la racine carrée des nombres suivants avec le degré d'approximation indiqué.

127. 38 à $\frac{1}{5}$ près. **128.** 46 à $\frac{1}{4}$ près. **129.** 112 à $\frac{1}{8}$.

130. 47 à $\frac{1}{3}$. **131.** 95 à $\frac{1}{11}$. **132.** 87 à $\frac{1}{6}$. **133.** 104 à $\frac{1}{16}$.

134. 105 à $\frac{1}{2}$. **135.** 311 à $\frac{1}{3}$. **136.** 210 à $\frac{1}{7}$. **137.** 417 à $\frac{1}{9}$.

138. 213 à $\frac{1}{10}$. **139.** 27 à 0,001. **140.** 82 à 0,01.

141. 315 à 0,0001. **142.** 61 à 0,001. **143.** 75 à 0,0001.
144. 12 à 0,000 01. **145.** 2 à 0,000 001. **146.** 7 à 0,0001.
147. 3,15 à 0,001. **148.** 17,02 à 0,001. **149.** 8,09 à 0,0001.
150. 75,3 à 0,01. **151.** 34,151 à 0,01. **152.** 141,2 à 0,001.

153. 317,6 à 0,01. **154.** 1,036 à 0,001. **155.** $\frac{28}{11}$ à 0,001.

156. $\frac{13}{2}$ à 0,01. **157.** $\frac{17}{8}$ à 0,001. **158.** $\frac{56}{13}$ à 0,001.

159. $\frac{45}{6}$ à 0,01. **160.** $\frac{12}{17}$ à 0,01. **161.** $\frac{5}{11}$ à 0,001.

162. $\frac{1}{2}$ à 0,001.

Pour les nombres suivants, poussez l'approximation jusqu'à la cinquième décimale inclusivement.

163. 326. **164.** 29. **165.** 491. **166.** 726. **167.** 391.
168. 1020. **169.** 935. **170.** 842. **171.** 719. **172.** 145.
173. 9,3434... **174.** 27,1919... **175.** 3,666... **176.** 3,1414...
177. 1,315 315...

Calculez, avec trois décimales, la racine carrée des quantités suivantes au moyen de la formule II.

178. 120. **179.** 143. **180.** 3602. **181.** 401. **182.** 101.
183. 10 004. **184.** 9 997. **185.** 90 004. **186.** 1 440 009.
187. 809 995. **188.** 6 396. **189.** 40 003.

XXXIV

2. Racine carrée des quantités algébriques.

$$(a^m)^n = a^{mn}. \qquad \sqrt[n]{a^{mn}} = a^{\frac{mn}{n}} = a^m.$$

$$\sqrt[3]{a^{12}} = a^4. \qquad \sqrt[5]{a^7} = a^{\frac{5}{7}}.$$

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2.$$

Extrayez la racine carrée des quantités suivantes :

1. a^4b^6. **2.** x^8y^2. **3.** $a^{10}b^6y^{12}$. **4.** $x^4y^2z^{10}$. **5.** $m^{16}n^{14}b^2$.
6. p^2x^{18}. **7.** $4a^6y^4$. **8.** $9h^{12}y^6$. **9.** $144(m^2)^3$. **10.** $25(a^3b^5)^4$.
11. $\frac{1}{4}x^6m^2$. **12.** $0{,}25y^8$. **13.** $\frac{4}{9}x^8y^7$. **14.** $\frac{1}{25}ab^{14}$. **15.** $\frac{9}{121}x^3z^{20}$.
16. $0{,}09my^3$. **17.** $0{,}01yz^9$. **18.** $0{,}16v^5$. **19.** $x^2 + y^2 + 2xy$.
20. $m^4 - 2m^2n^2 + n^4$. **21.** $4x^4 - 12x^2y^3 + 9y^6$.
22. $25a^6 + 4b^{14} + 20a^3b^7$. **23.** $\frac{1}{4}a^8 + \frac{4}{9}b^2 - \frac{2}{3}a^4b$.
24. $\frac{4}{25}m^{10} + \frac{4}{7}m^5n + \frac{25}{49}n^2$.
25. $a^6 + 4a^5b - 2a^4b^2 - 12a^3b^3 + 9a^2b^4$.
26. $9x^4 + 6x^3y - 29x^2y^2 - 10xy^3 + 25y^4$.
27. $16x^6 - 24x^5y + 65x^4y^2 - 42x^3y^3 + 49x^2y^4$.
28. $4a^4 - 12a^3b^2 - 4a^2b^3 + 9a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$.
29. $a^2 + 4ab - 2ac + 4b^2 - 4bc + c^2$.
30. $m^{10} - 6m^9n - 12m^5n^2 + 9m^8n^2 + 36m^4n^3 + 36n^4$.

31. $a^4 - 2a^3 + 3a^2 - 2a + 1$.

32. $1 + 2x + x^2 - 2x^3 - 2x^4 + x^6$.

33. $m^2 + n^2 + p^2 + 2mn + 2mp + 2np$.

34. $x^2 + 2xy + y^2 + 2xz + z^2 + 2yz$.

35. $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd$.

36. $x^2 + 2xy + 2xz + 2xu + y^2 + 2yz + 2yu + z^2 + 2zu + u^2$.

37. $m^2 - 2mn + 2mp - 2mq + n^2 - 2np + 2nq + p^2 - 2pq + q^2$.

38. $a^2 + 4b^2 + 9c^2 + 4ab + 6ac + 12bc$.

39. $9a^2 + 16b^2 + 25c^2 + 24ab + 30ac + 40bc$.

40. $4x^2 + 9y^2 + 16z^2 - 12xy + 16xz - 24yz$.

41. $1 + 4y^2 + x^2 - 4y + 2x - 4xy$.

42. $9x^2 + 16y^2 + 6x - 8y - 24xy + 1$.

43. $25b^2 + 9a^2 + 30ab + 16c^2 - 24ac - 40bc$.

44. $4 + 9y^2 - 20x + 25x^2 + 30xy - 12y$.

45. $4x^4 + 9y^6 - 12x^2y^3 + 16x^2z^5 + 16z^{10} - 24y^3z^5$.

46. $4 + 13a^2 + 9a^4 - 4a - 6a^3$.

47. $a^2b^2 + 2a^2b + a^2 - 2ab^2 - 2ab + b^2$.

48. $18x^2 + x^4 + 1 - 8x^3 - 8x$.

49. $9a^4 + 25b^2 + 64m^2 + z^2 - 30a^2b + 48a^2m - 6a^2z - 80bm + 10bz - 16mz$.

50. $y^{10} + 4u^6 + 9v^8 + 6v^4y^5 - 4u^3y^5 + 16q^{10} - 8q^5y^5 - 12u^3v^4 + 16q^5u^3 - 24q^5v^4$.

51. $a^4 + 16d^{4x} + 9e^{2y} + 9c^{10} - 6a^2c^5 - 8a^2d^{2x} + 24c^5d^{2x} + 6a^2e^y - 18c^5e^y - 24d^{2x}e^y$.

52. $9a^6 - 12a^5b - 38a^4b^2 + 52a^3b^3 + 33a^2b^4 - 56ab^5 + 16b^6$.

53. $16a^6 - 16a^3b^2 + 24a^3c^5 - 16a^3d^2 + 4b^4 - 12b^2c^5 + 8b^2d^2 + 9c^{10} - 12c^5d^2 + 4d^4$.

54. $4x^6 + 12x^3y^4 - 20x^3z + 4x^3 + 9y^8 - 30y^4z + 6y^4 + 25z^2 - 10z + 1$.

55. $5a^4b^2 - 4a^5b^3 + 6a^3b^4 - 2a^3b + 4a^6b^4 - 12a^4b^5 + 9a^2b^6 - 6a^2b^3 + a^2$.

56. $25a^2x^4 - 40a^4x^3 + 30a^3x^7 - 10ax^5 + 16a^6x^2 - 24a^5x^6 + 8a^3x^4 + 9a^4x^{10} - 6a^2x^8 + x^6$.

57. $49x^8 + 70x^7y - 3x^6y^2 - 28x^4y^4 - 6x^5y^3 - 34x^3y^5 + 13x^2y^6 - 6xy^7 + 9y^8$.

58. $9a^8 + 22a^6b^2 + 37a^4b^4 + 28a^2b^6 + 4b^8 - 12a^7b - 36a^5b^3 - 32a^3b^5 - 16ab^7$.

59. $25m^{10} + 16m^6n^2 + 4m^2n^6 + 16n^{10} + 64 - 40m^8n + 20m^6n^3 - 40m^5n^5 + 80m^5 - 16m^4n^4 + 32m^3n^6 - 64m^3n - 16mn^8 + 32mn^3 - 64n^5$.

60. $x^{10} + 4x^8y^2 + 9x^6y^4 + 16x^4y^6 + 25x^2y^8 + 4y^{10} - 4x^9y + 6x^8y^2 - 20x^7y^3 + 26x^6y^4 - 48x^5y^5 + 38x^4y^6 - 28x^3y^7 + 16x^2y^8 - 20xy^9$.

61. $9a^{18} + 25a^{14}x^2 + 139a^{10}x^6 + 235a^6x^{10} + 121a^2x^{14} + 4x^{18} + 30a^{16}x - 42a^{14}x^3 + 54a^{12}x^5 - 66a^{10}x^7 + 12a^9x^9 - 70a^{12}x^4 - 236a^8x^8 + 20a^7x^{10} - 28a^5x^{12} - 198a^4x^{12} + 36a^3x^{14} - 44ax^{16}$.

62. $\frac{m^4}{4} + \frac{n^6}{9} + \frac{m^2p^4}{4} - \frac{m^2n^3}{3} + \frac{p^8}{16} - \frac{n^3p^4}{6}$.

63. $\frac{x^2}{y^2} - \frac{4xz}{uy} + \frac{4z^2}{u^2} + \frac{6qx}{vy} + \frac{9q^2}{v^2} - \frac{12qz}{uv}$.

64. $\frac{9}{25} + \frac{a^8}{25} + \frac{m^6}{36} - \frac{6a^4}{25} - \frac{m^3}{5} + \frac{4n^8}{49} + \frac{12n^4}{35} + \frac{a^4m^3}{15} - \frac{4a^4n^4}{35} - \frac{2m^3n^4}{21}$.

65. $\frac{9m^6n^4}{25p^6q^8} - \frac{12m^5n^5}{35p^7q^9} - \frac{332m^4n^6}{735p^8q^{10}} + \frac{16m^3n^7}{63p^9q^{11}} + \frac{16m^2n^8}{81p^{10}q^{12}}$.

66. $25\frac{8}{7} - \frac{20x}{7y} + \frac{9y^2}{16x^2} - \frac{15y}{2x} + \frac{4x^2}{49y^2}$.

67. $\frac{x^2}{y^2}\left(\frac{x^2}{4y^2} + 1\right) + \frac{4y^2}{x^2}\left(\frac{y^2}{x^2} + 1\right) + 3$.

Calculez la racine carrée des quantités suivantes en poussant l'opération jusqu'au sixième terme, inclusivement.

68. $x^2 + a$. **69.** $a^2 - 1$. **70.** $a^2 - x$. **71.** $\frac{1}{\sqrt{x^2 - a}}$. **72.** $1 + x$.

---

73. $0{,}25a^6 + 0{,}09b^4 + 0{,}49l^{-4} - 0{,}3a^3b^2 - 0{,}7a^3l^{-2} + 0{,}42b^2l^{-2}.$

74. $0{,}01m^{\frac{2}{5}} + 0{,}04n^{-\frac{2}{3}} + 0{,}09n^{-\frac{8}{3}} - 0{,}04m^{\frac{1}{5}}n^{-\frac{1}{3}} - 0{,}06m^{\frac{1}{5}}n^{-\frac{4}{3}}$
$+ 0{,}12n^{-\frac{5}{3}}.$

75. $0{,}36x^{\frac{4}{3}} + 0{,}64y^{\frac{1}{2}} + 0{,}81z^{-8} + 0{,}96x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{4}} - 1{,}08x^{\frac{2}{3}}z^{-4} -$
$1{,}44y^{\frac{1}{4}}z^{-4}.$

76. $\frac{4x^4}{9} + \frac{16y^{-2}}{49} + \frac{64z^{\frac{4}{3}}}{81} + \frac{16u^{-\frac{6}{5}}}{25} - \frac{16x^2y^{-1}}{21} + \frac{32x^2z^{\frac{2}{3}}}{27}$
$- \frac{16x^2u^{-\frac{3}{5}}}{15} - \frac{64y^{-1}z^{\frac{2}{3}}}{63} + \frac{32u^{-\frac{3}{5}}y^{-1}}{35} - \frac{64u^{-\frac{3}{5}}z^{\frac{2}{3}}}{45}.$

77. $a^{2m}x^{2n-2} - 8a^{m+1}b^{\frac{3}{2}}x^{n-1} + 16a^2b^3 - \frac{6a^mc}{x^2} + \frac{24ab^{\frac{3}{2}}c}{x^{n+1}}$
$+ \frac{9c^2}{x^{2n+2}}.$

78. $(xy)^{\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{2}} + 4y^{\frac{1}{12}}\right) + \frac{4y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{x} + 2y^{\frac{1}{4}}\left(1 + 2y^{\frac{5}{12}}\right).$

79. $x^{\frac{8}{5}} - 2a^{-\frac{3}{5}}x^{\frac{11}{5}} + 2a^{\frac{4}{5}}x^{\frac{4}{5}} + a^{-\frac{6}{5}}x^{\frac{14}{5}} - 2a^{\frac{1}{5}}x^{\frac{7}{5}} + a^{\frac{8}{5}}.$

80. $xy - \frac{2x^{\frac{1}{2}}y^2}{3a^{\frac{1}{2}}} + \frac{y^3}{9a} + \frac{4x^{\frac{1}{2}}y^3}{a^{\frac{3}{2}}} - \frac{4y^4}{3a^2} + \frac{4y^5}{a^3}.$

81. $-9a^{-\frac{2}{3}} - \frac{12a^{-\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{4}}\sqrt{-1}}{5} + \frac{42a^{-\frac{1}{3}}c^{-\frac{1}{5}}}{x} + \frac{4b^{-\frac{1}{2}}}{25} - \frac{28b^{-\frac{1}{4}}c^{-\frac{1}{5}}}{5x\sqrt{-1}}$
$- \frac{49c^{-\frac{2}{5}}}{x^2}.$

82. $4x^{-6} - 16x^{-3}b^{-\frac{1}{4}}\sqrt{-1} - 12x^{-3}c^{\frac{1}{5}}\sqrt{-1} - 16b^{-\frac{1}{2}} -$
$24b^{-\frac{1}{4}}c^{\frac{1}{5}} - 9c^{\frac{2}{5}}.$

83. $\sqrt[4]{(16x^4 - 96x^3y + 216x^2y^2 - 216xy^3 + 81y^4)}.$

84. $\sqrt[4]{(1 + 24x^2 + 16x^4 - 8x - 32x^3)}.$

85. $\sqrt[4]{(625 + 2000a + 2400a^2 + 1280a^3 + 256a^4)}$.

86. $\sqrt[4]{(1 - 4z + 10z^2 - 16z^3 + 19z^4 - 16z^5 + 10z^6 - 4z^7 + z^8)}$.

87. $\sqrt[4]{\{a^4 - 2(\alpha + \beta)a^3 + (\alpha^2 + 4\alpha\beta + \beta^2)a^2 - 2\alpha\beta(\alpha + \beta)a + \alpha^2\beta^2\}^2}$.

88. $\sqrt[8]{(m^8 + 8m^7 + 28m^6 + 56m^5 + 70m^4 + 56m^3 + 28m^2 + 8m + 1)}$.

89. $\sqrt[8]{(256x^8 - 3072x^7y^2 + 16128x^6y^4 - 48384x^5y^6 + 90720x^4y^8 - 108864x^3y^{10} + 81648x^2y^{12} + 6561y^{16} - 34992xy^{14})}$.

XXXV

3. Racine cubique des nombres.

I. $\sqrt[3]{a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3} = a \pm b$.

II. $\sqrt[3]{a^3 \pm r} = a \pm \frac{r}{3a^2}$ pour r très petit par rapport à a.

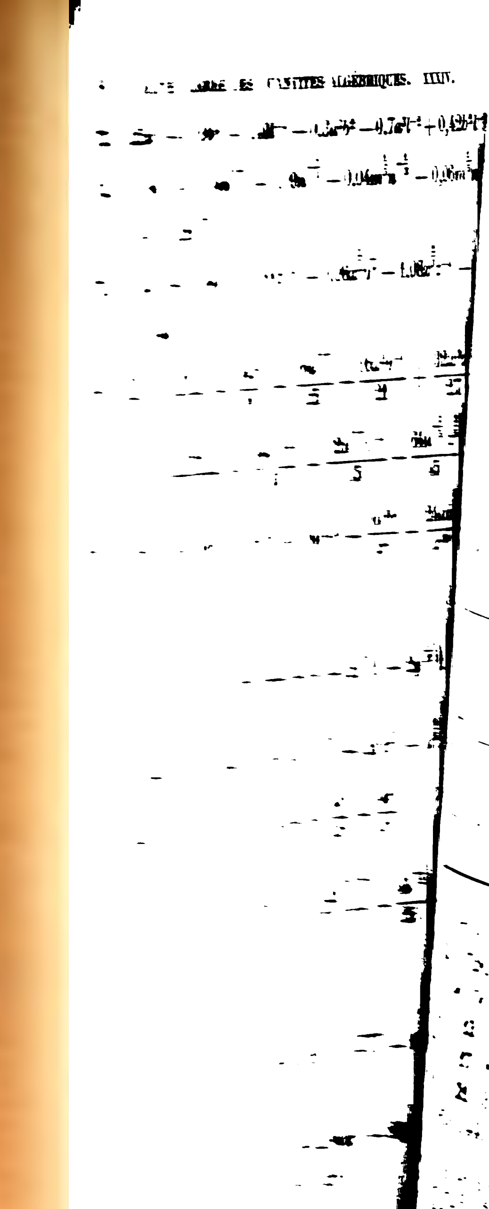
III. $\sqrt[3]{N}$ à $\frac{1}{b}$ près $= \frac{\sqrt[3]{Nb^3}}{b}$ ($\sqrt[3]{Nb^3}$ est calculé à une unité près).

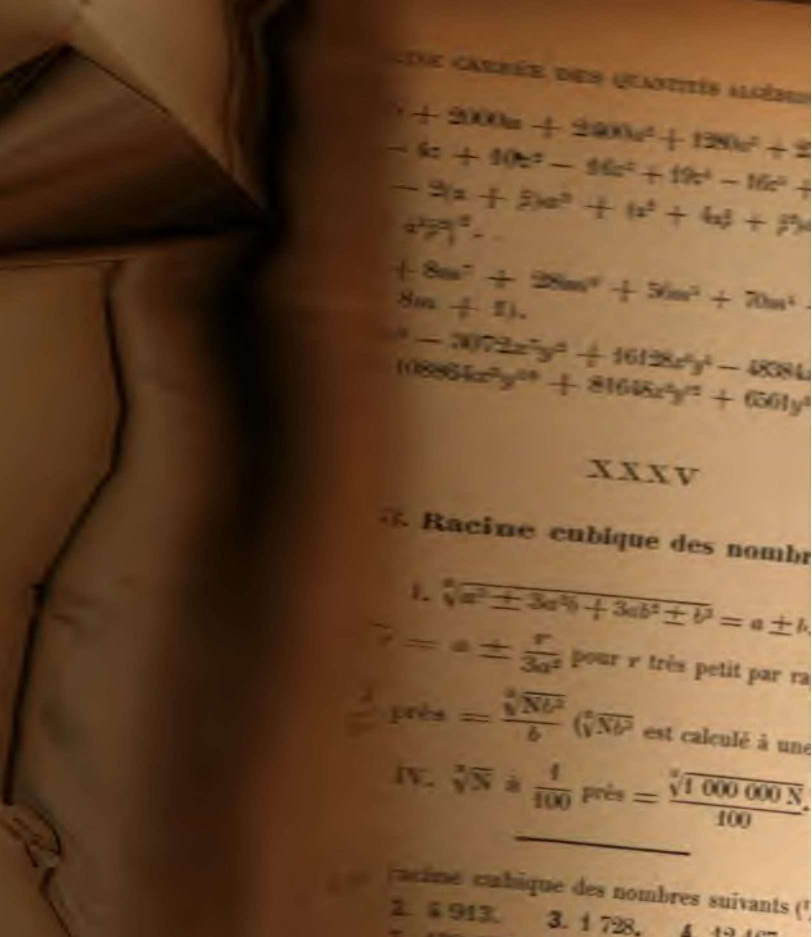
IV. $\sqrt[3]{N}$ à $\frac{1}{100}$ près $= \frac{\sqrt[3]{1\,000\,000\,N}}{100}$.

Extraire la racine cubique des nombres suivants [1].

1. 3 375. **2.** 4 913. **3.** 1 728. **4.** 12 167. **5.** 32 768.
6. 91 125. **7.** 132 651. **8.** 46 656. **9.** 21 952. **10.** 74 088.
11. 59 319. **12.** 157 464. **13.** 148 877. **14.** 238 328.
15. 551 368. **16.** 421 875. **17.** 884 736. **18.** 658 503.
19. 405 224. **20.** 778 688. **21.** 3 652 264. **22.** 9 663 597.
23. 71 473 375. **24.** 30 959 144. **25.** 8 741 816.

(1) Lorsque les nombres sont grands et divisibles par des cubes parfaits, on peut avec avantage effectuer cette division et employer un procédé analogue à celui qui a été indiqué page 73, note.





… $+ 2000m + 2400m^2 + 1280m^3 + …$

$- 4x + 10x^2 - 16x^3 + 19x^4 - 16x^5 + …$

$- 2(\alpha + \beta)x^3 + (\alpha^2 + 4\alpha\beta + \beta^2)…$

[illegible].

$+ 8m^7 + 28m^6 + 56m^5 + 70m^4$ …

$8m + 1)$.

… $- 3072x^7y^3 + 16128x^6y^4 - 48384$…

$108864x^3y^{10} + 81648x^2y^{12} + 6561y^1$…

XXXV

…. Racine cubique des nombr…

I. $\sqrt[3]{a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3} = a \pm b$…

… $= a \pm \frac{r}{3a^2}$ pour r très petit par ra…

… près $= \frac{\sqrt[3]{Nb^3}}{b}$ ($\sqrt[3]{Nb^3}$ est calculé à une…

IV. $\sqrt[3]{N}$ à $\frac{1}{100}$ près $= \frac{\sqrt[3]{1\,000\,000\,N}}{100}$.

… racine cubique des nombres suivants (¹) …

2. 4 913. 3. 1 728. 4. 12 167. …

7. 132 651. 8. 46 656. 9. 21 952. …

12. 157 464. 13. 148 877. 14. …

16. 421 875. 17. 884 736. 18. 6…

20. 778 688. 21. 3 652 264. 22. 9…

24. 30 959 144. 25. 8 741 …

(¹) …res sont grands et divisibles par des cub… effectuer cette division et employer u… …ui indiqué page 73, note.

26. 137 388 096. **27.** 43 243 551. **28.** 91 733 851.
29. 139 798 359. **30.** 2 571 353. **31.** 20 570 824.
32. 34 645 976. **33.** 146 363 183. **34.** 236 029 032.
35. 539 353 144. **36.** 849 278 123. **37.** 401 947 272.
38. 622 835 864. **39.** 445 943 744. **40.** 96 071 912.
41. 6 118 445 789. **42.** 134 453 795 867. **43.** 16 060 229 667.
44. 119 677 386 752. **45.** 219 365 327 791. **46.** 593 128 028 699.
47. 15 888 972 744. **48.** 34 233 150 223. **49.** 255 443 513 625.
50. 482 997 531 736. **51.** 356 099 306 215. **52.** 555 209 571 856.
53. 69 909 069 556 352. **54.** 10 620 725 720 395 328.
55. 5 340 104 393 239. **56.** 30 504 689 314 914 816.
57. $\sqrt[6]{1\,544\,804\,416}$. **58.** $\sqrt[6]{8\,303\,765\,625}$. **59.** $\sqrt[6]{1\,838\,265\,625}$.
60. $\sqrt[9]{10\,077\,696 \times 134\,217\,728}$.
61. $\sqrt[27]{1\,192\,533\,292\,512\,492\,016\,559\,195\,008\,117}$.

---

62. $\frac{27}{125}$. **63.** $\frac{8}{343}$. **64.** $\frac{125}{512}$. **65.** $\frac{343}{729}$. **66.** $\frac{2\,197}{3\,375}$.
67. $\frac{1\,728}{4\,913}$. **68.** $\frac{5\,832}{9\,261}$. **69.** $\frac{12\,167}{13\,824}$. **70.** $\frac{15\,625}{29\,791}$. **71.** $\frac{10\,648}{42\,875}$.
72. $2\,460\frac{3}{8}$. **73.** $151\frac{19}{27}$. **74.** $287\frac{62}{125}$. **75.** $114\frac{202}{343}$. **76.** $689\frac{53}{216}$.
77. $1\,815\frac{106}{125}$. **78.** $1\,662\frac{25}{216}$. **79.** $18\,874\frac{109}{512}$. **80.** $5\,971\frac{330}{343}$.
81. $153\frac{674}{729}$. **82.** 0,000 729. **83.** 0,001 728. **84.** 0,017 576.
85. 0,000 068 921. **86.** 0,010 503 459. **87.** 0,148 877.
88. 0,250 047. **89.** 0,117 649. **90.** 0,000 005 832.
91. 0,000 000 012 167. **92.** 0,000 030 664 297.
93. 0,000 175 616. **94.** 0,055 306 341. **95.** 0,000 614 125.

---

96. 4 à $\frac{1}{9}$ près. **97.** 15 à $\frac{1}{15}$ près. **98.** $15\frac{5}{6}$ à $\frac{1}{2}$.
99. $88\frac{3}{8}$ à $\frac{1}{8}$. **100.** 21 à $\frac{1}{6}$. **101.** $34\frac{3}{4}$ à $\frac{1}{11}$. **102.** 55 à $\frac{1}{7}$.
103. 217 à $\frac{1}{4}$. **104.** 513 à $\frac{1}{12}$. **105.** 156 à $\frac{1}{3}$. **106.** 410 à $\frac{1}{13}$.

107. 222 à $\frac{1}{5}$. **108.** $181\frac{4}{5}$ à $\frac{1}{7}$. **109.** $212\frac{1}{4}$ à $\frac{1}{9}$. **110.** $317\frac{1}{5}$ à $\frac{1}{6}$.

111. $102\frac{4}{9}$ à $\frac{1}{11}$. **112.** 3 à $\frac{1}{100}$. **113.** 13 à $\frac{1}{10}$. **114.** 24 à $\frac{1}{100}$.

115. 54 à $\frac{1}{1000}$. **116.** 7 à $\frac{1}{1000}$. **117.** $5\frac{1}{2}$ à $\frac{1}{10}$. **118.** 3,33 à $\frac{1}{10}$.

119. 81,5 à $\frac{1}{100}$. **120.** 547,91 à $\frac{1}{1000}$. **121.** 814,32 à $\frac{1}{100}$.

122. 950,35 à $\frac{1}{10000}$. **123.** 417,8 à $\frac{1}{100}$. **124.** 0,215 à $\frac{1}{1000}$.

125. 0,041 2 à $\frac{1}{100}$. **126.** 0,003 5 à $\frac{1}{1000}$. **127.** 0,36 à $\frac{1}{10000}$.

128. $\frac{64}{49}$ à $\frac{1}{100}$. **129.** $\frac{217}{25}$ à $\frac{1}{1000}$. **130.** $\frac{518}{3}$ à $\frac{1}{10000}$.

131. $41\frac{1}{17}$ à $\frac{1}{10}$. **132.** $56\frac{7}{9}$ à $\frac{1}{1000}$. **133.** $\frac{618}{21}$ à $\frac{1}{100}$.

134. $\frac{915}{7}$ à $\frac{1}{10}$. **135.** $\frac{20}{47}$ à $\frac{1}{100}$.

Pour les nombres suivants, poussez l'approximation jusqu'à la troisième décimale, inclusivement.

136. 867. **137.** 1 241. **138.** 976,2. **139.** 517.
140. 1 637. **141.** 4 915. **142.** 8 972. **143.** 12 761.
144. 56 431. **145.** 20 911. **146.** 3,252 5... **147.** 317,81 81...
148. 15,414 1.. **149.** 690. **150.** 10 010.

Calculez, avec deux décimales, la racine cubique des quantités suivantes au moyen de la formule II ci-dessus.

151. 731. **152.** 345. **153.** 3 378. **154.** 510.
155. 998. **156.** 8 007. **157.** 7 995. **158.** 125 009...
159. 215 992. **160.** 63 994.

XXXVI

4. Racine cubique des quantités algébriques.

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3.$$

Extrayez la racine cubique des quantités suivantes :

1. $a^6x^3y^6$. 2. $b^{12}z^6$. 3. $-d^{15}c^9$. 4. $-27a^9b^{18}$.
5. $125x^{21}y^3$. 6. $64(x^2y^5)^6$. 7. $-216(a^4b^3)^{15}$. 8. $8(m^3n^6)^2$.
9. $(-27a^3b^2)^5$. 10. $\frac{1}{8}c^6y^{27}$. 11. $\frac{27a^9b^{12}}{64x^3y^{15}}$. 12. $-\frac{64x^7y^{12}}{125z^8}$.
13. $\frac{1}{216z^{36}}$. 14. $\frac{0{,}125}{a^6x^9z}$. 15. $-0{,}000\,027m^{11}$.
16. $0{,}064m^9\sqrt{-1}$. 17. $0{,}125a^{12}b^5\sqrt{-1}$. 18. $-1000z^{21}u^4\sqrt{-1}$.
19. $-\frac{8x^5}{343y^6\sqrt{-1}}$. 20. $-\frac{a^9b^3c^5}{27}$.
21. $x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2$. 22. $\alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$.
23. $m^6 - 3m^4n + 3m^2n^2 - n^3$. 24. $x^3 + 3x^2y^2 + 3xy^4 + y^6$.
25. $8a^3 - 12a^2b + 6ab^2 - b^3$. 26. $d^3 + 9d^2e + 27de^2 + 27e^3$.
27. $125a^3 + 225a^2b + 135ab^2 + 27b^3$.
28. $64d^3 - 144d^2e + 108de^2 - 27e^3$.
29. $343p^3 + 735p^2r + 125r^3 + 525pr^2$.
30. $240uv^2 - 300u^2v + 125u^3 - 64v^3$.
31. $441x^4y^5 + 343x^6 + 27y^{15} + 189x^2y^{10}$.
32. $54a^3b^8 + 8a^9 - 27b^{12} - 36a^6b^4$.
33. $6m^8n + 8n^3 + m^{12} + 12m^4n^2$.
34. $\frac{a^6}{27} - a^4b^4 - 27b^{12} + 9a^2b^8$.
35. $8a^3 + 36a^2b - 12a^2c + 27b^3 + 54ab^2 + 6ac^2 - 27b^2c$
$+ 9bc^2 - c^3 - 36abc$.
36. $8x^3 + 12x^2y + 96xy^2 - 48x^2y - 64y^3 + 6xz^2 + 48y^2z$
$+ z^3 - 12yz^2 - 48xyz$.

62. $\frac{x^5}{16} - \frac{x^5}{15} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{27} + \frac{x^7}{25} - \frac{x^6}{10} + \frac{x^6}{64} - \frac{x^9}{125} - \frac{3x^7}{80}$
$+ \frac{3x^8}{100}$.

63. $\frac{a^9b^3}{x^6} - \frac{a^3b^9}{y^6} + \frac{3a^8b^4}{x^5y} + \frac{3a^4b^8}{xy^5} - \frac{5a^6b^6}{x^3y^3}$.

64. $\frac{12m^7n}{x^5} - \frac{3m^2n^5}{x^5} - \frac{6m^5n^2}{x^4} - \frac{n^9}{x^9} + \frac{3mn^3}{x^7}(n^4 - 4m^5)$
$- \frac{8m^9}{x^6} + \frac{12m^4n^4}{x^6} + \frac{m^3n^3}{x^3} - \frac{6m^3n^6}{x^8}$.

Calculez la racine cubique des quantités suivantes, en poussant l'opération jusqu'au septième terme inclusivement.

65. $1 + a$. 66. $1 - a$. 67. $a^3 + b$. 68. $a^3 - b$.
69. $a^3 + 1$. 70. $a^3 - 1$. 71. $a^3 - a^2 + 1$.

Trouver la racine cubique des polynomes suivants:

72. $8x^{-3} + 21x^{-6} - 36x^{-4} + 108x^{-8} + 64x^{-12} + 54x^{-5} +$
$96x^{-9} - 144x^{-10} - 144x^{-7}$.

73. $-0{,}416y^{-12} - 0{,}001y^{-15} + 0{,}008y^{-9} - 0{,}096y^{-10} - 0{,}186y^{-13}$
$+ 0{,}372y^{-11} - 0{,}024y^{-14}$.

74. $0{,}15a^{-5} - 64a^{-15} - 2{,}94a^{-7} + 0{,}125a^{-3} + 23{,}52a^{-11} -$
$2{,}392a^{-9} + 9{,}6a^{-13}$.

75. $-0{,}0094m^{-3} + 0{,}000\,008m^{-6} + 0{,}343 + 0{,}001\,44m^{-4} -$
$0{,}000\,12m^{-5} - 0{,}147m^{-5} + 0{,}0504m^{-2}$.

76. $56a^4 + 64a + a^7 + 96a^2 + 96a^3 + 24a^5 + 6a^6$.

77. $27b^{\frac{6}{5}} + 296b^{\frac{9}{5}} - 125b^{\frac{12}{5}} - 108b^{\frac{7}{5}} + 9b^{\frac{8}{5}} - 15b^2 - 300b^{\frac{11}{5}}$.

78. $0{,}343x^{\frac{9}{7}} - 0{,}396x^{\frac{13}{7}} - 1{,}504x^{\frac{12}{7}} - 0{,}216x^{\frac{15}{7}} + 1{,}176x^{\frac{10}{7}} +$
$0{,}864x^2 + 0{,}462x^{\frac{11}{7}}$.

79. $8a^9x^{\frac{9}{7}} - 3a^4x^{\frac{4}{7}} + a^3x^{\frac{3}{7}} + 9a^5x^{\frac{5}{7}} + 18a^7x - 13a^6x^{\frac{6}{7}} -$
$12a^8x^{\frac{8}{7}}$.

80. $-27x^{-3}\sqrt{-1} - 54x^{-4}\sqrt{-1} - 36x^{-5}\sqrt{-1} - 8x^{-6}\sqrt{-1}.$

81. $144y^{-10}\sqrt{-1} - 64y^{-9}\sqrt{-1} - 108y^{-11}\sqrt{-1} + 27y^{-12}\sqrt{-1}.$

82. $36a^{-4}\sqrt{-1} - 48a^{-1}\sqrt{-1} - 54a^{-5}\sqrt{-1} + 144a^{-2}\sqrt{-1}$
$- 96a\sqrt{-1} + 27a^{-6}\sqrt{-1} - 116a^{-3}\sqrt{-1} + 144\sqrt{-1}$
$- 64a^3\sqrt{-1}.$

83. $-64ix^{-\frac{3}{2}} - 27ix^{-3} + 48ix^{-\frac{7}{4}} - 156ix^{-2} - 117ix^{-\frac{5}{2}} +$
$27ix^{-\frac{11}{4}} + 73ix^{-\frac{9}{4}}.$

84. $\sqrt[6]{(729x^6 - 1458x^5 + 1215x^4 - 540x^3 + 135x^2 - 18x + 1)}.$

85. $\sqrt[9]{(30618y^{28} - 61236y^{30} + 78732y^{32} - 59049y^{34} + 19683y^{36}}$
$\overline{- 10206y^{26} + 2268y^{24} - 324y^{22} - y^{18} + 27y^{20})}.$

86. $\sqrt[9]{(326592x^{13} - 145152x^{12} + 41472x^{11} - 6912x^{10} + 512x^9}$
$\overline{- 489888x^{14} + 489888x^{15} - 19683x^{18} + 118098x^{17}}$
$\overline{- 314928x^{16})}.$

CHAPITRE III

ÉQUATIONS EXPONENTIELLES OU EMBARRASSÉES DE RADICAUX RENTRANT DANS LE PREMIER DEGRÉ

XXXVII

1. Equations du premier degré embarrassées de radicaux.

1. $\sqrt{y} = 4.$ **2.** $\sqrt{x} = 2.$ **3.** $2\sqrt{x} = 24.$ **4.** $\sqrt{5x} = 20.$

5. $\sqrt[3]{y} = 2.$ **6.** $\sqrt[3]{2x} = 4.$ **7.** $2\sqrt[3]{2x} = 1.$ **8.** $\sqrt{5x} = \frac{5}{2}.$

9. $\sqrt[3]{0,5y} = \frac{3}{2}.$ **10.** $\sqrt[4]{8y} = 2.$ **11.** $3\sqrt{2x} = 6.$ **12.** $\sqrt[3]{5x} = 3.$

62. $\frac{x^5}{16} - \frac{x^5}{15} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{27} + \frac{x^7}{25} - \frac{x^6}{10} + \frac{x^6}{64} - \frac{x^9}{125} - \frac{3x^7}{80}$
$+ \frac{3x^8}{100}$.

63. $\frac{a^9b^3}{x^6} - \frac{a^3b^9}{y^6} + \frac{3a^8b^4}{x^5y} + \frac{3a^4b^8}{xy^5} - \frac{5a^6b^6}{x^3y^3}$.

64. $\frac{12m^7n}{x^5} - \frac{3m^2n^5}{x^5} - \frac{6m^5n^2}{x^4} - \frac{n^9}{x^9} + \frac{3mn^3}{x^7}(n^4 - 4m^5)$
$- \frac{8m^9}{x^6} + \frac{12m^4n^4}{x^6} + \frac{m^3n^3}{x^3} - \frac{6m^3n^6}{x^8}$.

Calculez la racine cubique des quantités suivantes, en poussant l'opération jusqu'au septième terme inclusivement.

65. $1 + a$. **66.** $1 - a$. **67.** $a^3 + b$. **68.** $a^3 - b$.
69. $a^3 + 1$. **70.** $a^3 - 1$. **71.** $a^3 - a^2 + 1$.

Trouver la racine cubique des polynomes suivants:

72. $8x^{-3} + 21x^{-6} - 36x^{-4} + 108x^{-8} + 64x^{-12} + 54x^{-5} + 96x^{-9} - 144x^{-10} - 144x^{-7}$.

73. $-0{,}416y^{-12} - 0{,}001y^{-15} + 0{,}008y^{-9} - 0{,}096y^{-10} - 0{,}186y^{-13} + 0{,}372y^{-11} - 0{,}024y^{-14}$.

74. $0{,}15a^{-5} - 64a^{-15} - 2{,}94a^{-7} + 0{,}125a^{-3} + 23{,}52a^{-11} - 2{,}392a^{-9} + 9{,}6a^{-13}$.

75. $-0{,}0094m^{-3} + 0{,}000\,008m^{-6} + 0{,}343 + 0{,}001\,44m^{-4} - 0{,}000\,12m^{-5} - 0{,}147m^{-5} + 0{,}0504m^{-2}$.

76. $56a^4 + 64a + a^7 + 96a^2 + 96a^3 + 24a^5 + 6a^6$.

77. $27b^{\frac{6}{5}} + 296b^{\frac{9}{5}} - 125b^{\frac{12}{5}} - 108b^{\frac{7}{5}} + 9b^{\frac{8}{5}} - 15b^2 - 300b^{\frac{11}{5}}$.

78. $0{,}343x^{\frac{9}{7}} - 0{,}396x^{\frac{18}{7}} - 1{,}504x^{\frac{12}{7}} - 0{,}216x^{\frac{15}{7}} + 1{,}176x^{\frac{10}{7}} + 0{,}864x^2 + 0{,}462x^{\frac{11}{7}}$.

79. $8a^9x^{\frac{9}{7}} - 3a^4x^{\frac{4}{7}} + a^3x^{\frac{3}{7}} + 9a^5x^{\frac{5}{7}} + 18a^7x - 13a^6x^{\frac{6}{7}} - 12a^8x^{\frac{8}{7}}$.

80. $-27x^{-3}\sqrt{-1} - 54x^{-4}\sqrt{-1} - 36x^{-5}\sqrt{-1} - 8x^{-6}\sqrt{-1}.$

81. $144y^{-10}\sqrt{-1} - 64y^{-9}\sqrt{-1} - 108y^{-11}\sqrt{-1} + 27y^{-12}\sqrt{-1}.$

82. $36a^{-4}\sqrt{-1} - 48a^{-1}\sqrt{-1} - 54a^{-5}\sqrt{-1} + 144a^{-2}\sqrt{-1}$
$- 96a\sqrt{-1} + 27a^{-6}\sqrt{-1} - 116a^{-3}\sqrt{-1} + 144\sqrt{-1}$
$- 64a^{3}\sqrt{-1}.$

83. $-64ix^{-\frac{3}{2}} - 27ix^{-3} + 48ix^{-\frac{7}{4}} - 156ix^{-2} - 117ix^{-\frac{5}{2}} +$
$27ix^{-\frac{11}{4}} + 73ix^{-\frac{9}{4}}.$

84. $\sqrt[6]{(729x^6 - 1458x^5 + 1215x^4 - 540x^3 + 135x^2 - 18x + 1)}.$

85. $\sqrt[9]{(30618y^{28} - 61236y^{30} + 78732y^{32} - 59049y^{34} + 19683y^{36}}$
$\overline{- 10206y^{26} + 2268y^{24} - 324y^{22} - y^{18} + 27y^{20})}.$

86. $\sqrt[9]{(326592x^{13} - 145152x^{12} + 41472x^{11} - 6912x^{10} + 512x^9}$
$\overline{- 489888x^{14} + 489888x^{15} - 19683x^{18} + 118098x^{17}}$
$\overline{- 314928x^{16})}.$

CHAPITRE III

ÉQUATIONS EXPONENTIELLES OU EMBARRASSÉES DE RADICAUX RENTRANT DANS LE PREMIER DEGRÉ

XXXVII

1. Equations du premier degré embarrassées de radicaux.

1. $\sqrt{y} = 4.$ **2.** $\sqrt{x} = 2.$ **3.** $2\sqrt{x} = 24.$ **4.** $\sqrt{5x} = 20.$

5. $\sqrt[3]{y} = 2.$ **6.** $\sqrt[3]{2x} = 4.$ **7.** $2\sqrt[3]{2x} = 1.$ **8.** $\sqrt{5x} = \frac{5}{2}.$

9. $\sqrt[3]{0,5y} = \frac{3}{2}.$ **10.** $\sqrt[4]{8y} = 2.$ **11.** $3\sqrt{2x} = 6.$ **12.** $\sqrt[3]{5x} = 3.$

13. $\sqrt{x+4}=4$. 14. $\sqrt{x-5}=2$. 15. $\sqrt{6-x}=2$.

16. $\sqrt{3+x}=5$. 17. $\sqrt{2x+6}=4$. 18. $\sqrt{5x+9}=7$.

19. $\sqrt{4x+3}=2$. 20. $\sqrt{3x+6}=3$. 21. $\sqrt{10x+16}=5$.

22. $2\sqrt{x+5}=\sqrt{28}$. 23. $3\sqrt{4x-8}=\sqrt{13x-3}$.

24. $\sqrt{x+9}=5\sqrt{x}-3$. 25. $4=2\sqrt{x}-3$.

26. $5-\sqrt{3y}=4$. 27. $9+4\sqrt{x}=11$.

28. $6-3\sqrt{x}=4$. 29. $7+2\sqrt[3]{3x}=5$.

30. $11-4\sqrt{5x}=9$. 31. $6+\sqrt{8x}=2$.

32. $\sqrt[3]{2x-3}=-3$. 33. $\sqrt{8y+17}=4$.

34. $\sqrt[3]{3x+7}=3$. 35. $\sqrt[5]{80x-43}=-3$.

36. $14+\sqrt[3]{4x-40}=10$. 37. $\sqrt{2x+8}=\sqrt{5x-2}$.

38. $\sqrt[3]{10y-4}=\sqrt[3]{7y+11}$. 39. $\sqrt[5]{2x-3}=\sqrt[5]{3x+2}$.

40. $\sqrt{2x-8}=\sqrt[4]{4x^2-12x+32}$.

41. $\sqrt[3]{3y+2}=\sqrt[6]{9y^2+10y-6}$.

42. $\sqrt{x-1}=\sqrt[8]{(x-1)^2(x+3)^2}$.

43. $\sqrt[3]{2x-5}=\sqrt[9]{\frac{1}{3}(2x-5)^4}$.

44. $\sqrt{3x-4)}=\sqrt[6]{(3x-4)^3(9x-6)}$.

45. $2\sqrt{y-2}=\sqrt[4]{32(y-2)^3}$.

46. $\sqrt[4]{9x^4+6x^3+5x^2-2x}=\sqrt{3x^2+x}$.

47. $\sqrt[6]{8x^3-60x^2+145x-115}=\sqrt{2x-5}$.

48. $\sqrt[3]{(3x^2-5x+2)(2x+4)}=\sqrt[6]{(3x^2-5x+2)^2(4x^2-5x+1)}$.

49. $\sqrt{(5x^5-x^4+2)(5x+3)}=\sqrt[4]{(5x^5-x^4+2)^2(25x^2+25x-6)}$.

50. $3\sqrt{16x+9}=12\sqrt{4x}-9$. 51. $\sqrt{\frac{15}{4}+x}=\frac{3}{2}+\sqrt{x}$.

52. $\sqrt{32+x}=16-\sqrt{x}$. 53. $\sqrt{x}-\sqrt{x-5}=\sqrt{5}$.

54. $\sqrt{x-7}=\sqrt{x-14}+1$. 55. $\sqrt{x-7}=\sqrt{x+1}-2$.

56. $\sqrt{22 - x} - 2 = \sqrt{10 - x}$.

57. $\sqrt{x + 20} - \sqrt{x - 1} - 3 = 0$.

58. $\sqrt{x + 15} - 7 = 7 - \sqrt{x - 13}$.

59. $x = 7 - \sqrt{x^2 - 7}$.

60. $\sqrt{x} - \dfrac{5}{\sqrt{x}} = \sqrt{x - 9}$.

61. $2\sqrt{x} + \dfrac{8}{2\sqrt{x}} = 2\sqrt{x + 5}$.

62. $(\sqrt{x} + 4)(\sqrt{x} - 4) = -13$.

63. $(3\sqrt{x} - 2)(3\sqrt{x} + 2) = -10$.

64. $(2\sqrt{3x} + 5)(2\sqrt{3x} - 5) = 11$.

65. $\sqrt{15 + \sqrt{2x + 80}} = 5$.

66. $\sqrt{3 + \sqrt{x}} = \sqrt{12 - \sqrt{4x}}$.

67. $\sqrt{3 + \sqrt{x}} = \sqrt{11 - 3\sqrt{x}}$.

68. $\dfrac{3 + 2\sqrt{x}}{5} = \dfrac{7\frac{1}{5}}{3 - 2\sqrt{x}}$.

69. $\dfrac{7\sqrt{y}}{2 + 3\sqrt{y}} = 2$.

70. $\dfrac{5}{2\sqrt{x} - 7} = \dfrac{3}{\sqrt{x}}$.

71. $\dfrac{5}{13 - 3\sqrt{y}} = \dfrac{15}{1 + \sqrt{y}}$.

72. $\dfrac{x}{\sqrt{x}} = \dfrac{8\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2}$.

73. $\dfrac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} = \dfrac{\sqrt{x} + 1}{x - 3}$.

74. $\dfrac{3 - x}{2 - \sqrt{x}} = \dfrac{2 + \sqrt{x}}{4 - x}$.

75. $\dfrac{4y}{4y + 6\sqrt{y}} = \dfrac{4y - 6\sqrt{y}}{8 - 4\frac{1}{2}y}$.

76. $\dfrac{2\sqrt{z}}{3\sqrt{z} + 4} = \dfrac{3\sqrt{z} - 4}{4\frac{1}{2}\sqrt{z} - 4}$.

77. $\dfrac{5\sqrt{x} - 7}{4\sqrt{x} + 5} = \dfrac{4\sqrt{x} - 5}{5\sqrt{x} + 7}$.

78. $\sqrt{5x^2 - 2x} = \dfrac{5x^2 - 3x + 7}{\sqrt{5x^2 - 2x}}$.

79. $\dfrac{4x^3 - 3x^2 + 5x - 1}{\sqrt{4x^3 - 3x^2 + 9}} = \sqrt{4x^3 - 3x^2 + 9}$.

80. $\dfrac{2x^3 - 3x^2 + 6x}{\sqrt{2x^3 - 3x^2 + 4}} = \sqrt{2x^3 - 3x^2 + 4}$.

81. $\dfrac{12}{\sqrt{2x-3}} - \sqrt{2x+3} = \dfrac{16}{\sqrt{2x-3}}.$

82. $\sqrt{2y-1} + \dfrac{7}{\sqrt{2y+1}} = \dfrac{8}{\sqrt{2y+1}}.$

83. $\dfrac{\sqrt{6y}-4}{3} = \dfrac{12}{\sqrt{6y}+4}.$

84. $\dfrac{\sqrt{6x^4-7x^3-3x^2-18x+36}}{\sqrt{2x^2-3x}} = \sqrt{3x^2+x}.$

85. $\dfrac{\sqrt{(\frac{1}{2}x^3-\frac{5}{12}x^2+\frac{1}{12}x)(x+1)}}{\sqrt{3(x-\frac{1}{3})}} = \sqrt{\left(\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x}{4}\right)(x^2-1)}.$

86. $\dfrac{2x^2-x+2}{\sqrt{x(2x-1)+2}} = \dfrac{\sqrt{2(x^2+1)-x}}{\sqrt{5x-19}}.$

87. $\dfrac{2(5x^3-22x^2+11x-12)}{3\sqrt{5x^2-2x+3}} = 3\sqrt{5x^2-2x+3}.$

88. $\dfrac{24\sqrt[8]{2x+136}+13}{15+4\sqrt[8]{2x+136}} = -5.$

89. $\dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{x} = \sqrt{\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{x}\sqrt{9-\dfrac{36}{x}}}.$

90. $\dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3} = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}.$

91. $\dfrac{\sqrt{8x+1}+\sqrt{8x}}{\sqrt{8x+1}-\sqrt{8x}} = 13.$

92. $\dfrac{2-\sqrt{2-x}}{2+\sqrt{2-x}} = \dfrac{1}{7}.$

---

93. $\sqrt{a-x} = \sqrt{x-b}.$

94. $\sqrt{a-\sqrt{x}} = \sqrt{b+\sqrt{x}}.$

95. $y + \sqrt{2my+y^2} = m.$

96. $m + \sqrt{2am+x^2} = x-a.$

97. $\sqrt{4m+x} = 2\sqrt{1+x} - \sqrt{x}$. 98. $t = \pi\sqrt{\frac{x}{g}}$.

99. $\dfrac{\sqrt{\frac{a+y}{a-y}} + am}{\sqrt{\frac{a+y}{a-y}} - am} = 1$. 100. $\sqrt[5]{\frac{a^2-by}{b^2+ay}} = \sqrt[3]{\frac{a^2-by}{b^2+ay}}$.

101. $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b-x}}{\sqrt{a}-\sqrt{b-x}} = 7$. 102. $\dfrac{\sqrt{a^2+x}+\sqrt{a^2-x}}{\sqrt{a^2+x}-\sqrt{a^2-x}} = b^2$.

103. $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{a+x}}{\sqrt{a+x}} = m$. 104. $\dfrac{\sqrt{y}+a}{\sqrt{y}-2b} = \dfrac{a-\sqrt{y}}{4b-\sqrt{y}}$.

105. $a\sqrt{m+x} + \sqrt{x} = \dfrac{am}{\sqrt{m+x}}$.

106. $a\sqrt[4]{x+m} = b\sqrt[3]{x+m}$.

107. $\dfrac{a}{n} - \dfrac{b}{x} = \sqrt{\dfrac{a^2}{n^2} - \dfrac{b^2}{x^2}\sqrt{1+\dfrac{4a^2x^2}{b^2n^2}} - 2a}$.

108. $$2a = \left[6abx(bx-2a) + 8a^3 - \frac{b^3x^3}{2a^2}\sqrt{4a^4 - 2abx^2 + x\sqrt{ax^2+2bx}}\right]^{\frac{1}{3}} + bx.$$

---

109. $(2-x)^{\frac{2}{3}} = (4-5x-3x^2)^{\frac{1}{3}}$.

110. $y^{\frac{1}{2}} - y^{-\frac{1}{2}} = (y+1)^{\frac{1}{2}}$. 111. $x^{\frac{1}{2}} + (x-9)^{\frac{1}{2}} = 36(x-9)^{-\frac{1}{2}}$.

112 (1). $\dfrac{1+(1-x)^{\frac{1}{2}}}{1-(1-x)^{\frac{1}{2}}} = 3$.

113. $\left\{(3+x^2)x^{-3}\right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{\frac{1}{3}(9x^{-3}+x^{-2})\right\}^{\frac{1}{2}}$.

(1) Quelques équations de ce paragraphe sont proprement de degrés supérieurs au premier, puisqu'on ne les abaisse au premier qu'en les divisant par un facteur contenant x. Les exemples 109, 113, 115, entre autres, admettent comme seconde racine zéro.

114. $\sqrt{2x} + (2x)^{-\frac{1}{2}}(1 + x) = 2(2x)^{-\frac{1}{2}}.$

115. $\left\{2(2 - 5x)^2 + x(4 + 4x - 27x^2)\right\}^{\frac{1}{3}}\left\{1 - 10x^2 + 2x^3\right\}^{-\frac{1}{6}}$

$= \left\{8 - 9x(4 - 6x + 3x^2)\right\}^{\frac{1}{3}}.$

116. $(a + x)^{\frac{1}{5}} = (x^2 + 5ax + b^2)^{\frac{1}{10}}.$

117. $\left(5b + x\right)^{\frac{1}{m}} = \left[5b(25b^2 + 14bx + 5x^2) + x^3\right]^{\frac{1}{3m}}.$

118. $\left(x^2 + 3ax + 4b^2\right)^{\frac{1}{2p}} = \left(x + 2a\right)^{\frac{1}{p}}.$

119. $\left(7a^2 - 4ax + 9x^2\right)^{\frac{1}{p}} = \left(2a - 3x\right)^{\frac{2}{p}}.$

120. $\left(a^2 - b^2x^2\right)^{\frac{3}{m}} \times \left(a + bx\right)^{-\frac{1}{m}} = \left(a + bx\right)^{\frac{2}{m}}.$

121. $\left(\frac{y}{5} + 4\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{y}{5} - 4\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{4y - 2}{5}\right)^{\frac{1}{2}}.$

122. $(12 + x)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} + 6.$ **123.** $(x - 3)^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{(x - 3)^{\frac{1}{2}}}.$

124. $x^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{2}} = (a + x)^{\frac{1}{2}}.$

125. $x - a = \left\{a^2 + x(x^2 - a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{2}}.$

126 (1). $(5x - 1) : \left((5x)^{\frac{1}{2}} + 1\right) = m + \frac{1}{3}\left((5x)^{\frac{1}{2}} - 1\right).$

127. $z^2 + p(2z^2 - q^2)^{\frac{1}{2}} = z\left\{p + (2z^2 - q^2)^{\frac{1}{2}}\right\}.$

128 (2). $\left((3x)^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}}\right)\left((3x)^{\frac{1}{2}} - \frac{3x}{2}\right) : (3x - a)$

$= 1 - \frac{1}{2}\left((3x)^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}}\right).$

(1) Remplacez $5x - 1$ par $\left((5x)^{\frac{1}{2}} + 1\right)\left((5x)^{\frac{1}{2}} - 1\right).$

(2) Remplacez $3x - a$ par $\left((3x)^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}}\right)\left((3x)^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}}\right).$

129. $(m - z) : (\sqrt{m} - \sqrt{z}) = (n - z) : (\sqrt{n} + \sqrt{z})$.

130 (1). $\left\{\left(ab^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(ba^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}x^{\frac{1}{2}} = a\left(bx^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} - b\left(ax^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$.

---

131. $\sqrt{x + y} = 7$.
$\sqrt{x - y} = 3$.

132. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 9$.
$\sqrt{x} - \sqrt{y} = 7$.

133. $\sqrt{x + y} = 5$
$4x - 5y = 19$.

134. $2\sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 20$
$3\sqrt{x} - 5\sqrt{y} = 11$.

135. $\frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 6$
$\sqrt{\frac{y}{3} - \frac{x}{12}} = 2$.

136. $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{1}{2}$
$\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{3}{10}$.

137. $\sqrt{3x + 5y} = 6$
$\sqrt[3]{15x - \frac{y}{2}} = 3$.

138. $\sqrt{3x - \sqrt{2y}} = \sqrt{7}$
$3x + \sqrt{18y} = 15$.

139. $\sqrt{x - 2\sqrt{y}} = 2$
$\sqrt{x + 5\sqrt{y}} = 5$.

140. $\sqrt{x} + \sqrt{y} : \sqrt{x} - \sqrt{y} :: 7 : 1$
$\sqrt{x + y} = 0{,}5$.

141. $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = 2a$
$\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{y}} = b$.

142. $\frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{2\sqrt{z}} = m$
$\frac{1}{4\sqrt{y}} - \frac{1}{3\sqrt{z}} = n$.

143. $(x + \sqrt{ay - z})^{\frac{1}{2}} = 1$
$(x - \sqrt{y + az})^{\frac{1}{3}} = -1$
$(x + \sqrt{y + az})^{\frac{1}{2}} = 1$.

(1) Après avoir isolé dans le second membre le facteur commun $x^{\frac{1}{4}}$, remplacez $ab^{\frac{1}{2}} - ba^{\frac{1}{2}}$ par $\left\{\left(ab^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(ba^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}\left\{\left(ab^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(ba^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}$.

144. $\sqrt{x} - \sqrt{m - y} = \sqrt{x - y}$

$\sqrt{x - y} + \sqrt{m - y} = \frac{5}{2}\sqrt{m - y}.$

145. $(x + y)^{\frac{1}{2}} + (x - y)^{\frac{1}{2}} = 3x$

$(x + y)^{\frac{1}{2}} - (x - y)^{\frac{1}{2}} = 3y.$

146. $(x^2 + ay - b^2)^{\frac{1}{2}} = c + x$

$(y^2 + mx)^{\frac{1}{2}} = x + y.$

147. $\frac{1}{2(x - y)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2(x + y)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{15}$

$15(x + y)^{\frac{1}{2}} + 15(x - y)^{\frac{1}{2}} = 8(x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}.$

148. $(x + y - z + 5)^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}$

$(2x - y + z)^{\frac{1}{2}} + 2 = 5$

$\frac{x + y}{(x + y)^{\frac{1}{2}}} = 0{,}4(10z)^{\frac{1}{2}}$

149. $x^{\frac{1}{3}} + z^{\frac{1}{5}} + y^{\frac{1}{2}} = 6$

$x^{\frac{1}{3}} - z^{\frac{1}{5}} = 1$

$y^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{3}} = 1.$

150. $\left\{4(x + y + z + 4)\right\}^{\frac{1}{4}} = 2(3x + y - z - 4)^{\frac{1}{4}}$

$\left\{\left[\frac{1}{4}(x + y + z)\right]^2 - \frac{15}{4}(y + z) + \frac{25}{16}\right\}^{\frac{1}{4}}$

$= \frac{1}{2}(x + y + z - 35)^{\frac{1}{2}}$

$1 : (z - x - 4)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{y}\right)^{\frac{1}{2}}.$

---

151. Un nombre est tel que si, aux $\frac{3}{4}$ de sa racine carrée on ajoute 7, la racine carrée de la somme ainsi obtenue est 4. Quel t ce nombre ?

152. Quel est le nombre dont la moitié de la racine carrée ıgmentée des $\frac{3}{7}$ de cette même racine donne 13 pour somme?

153. Un nombre est tel que si on le multiplie par $9\frac{1}{3}$ et que, du ɔduit, on retranche 2 fois la racine carrée du nombre donné,

13. $m^{\frac{x}{3}} = m^{5-x}$. 14. $\sqrt[3]{a^x} = \sqrt[2]{a^{3x+2}}$. 15. $\sqrt[5]{a^{x+2}} = a^{x-2}$.

16. $\sqrt[4]{a^{z+1}} = \sqrt[3]{a^{z-2}}$. 17. $\sqrt[1-x]{a^3} = \sqrt[3-x]{a^2}$.

18. $\sqrt[2x+1]{a^4} = \sqrt[3x-1]{a^5}$. 19. $\sqrt[x+1]{a^{2x-1}} = \sqrt[2x+1]{a^{4x-3}}$.

20. $\sqrt[z+2]{e^{2+3z}} = \sqrt[2z-3]{e^{6z-1}}$ 21. $\sqrt[5]{a^{2x+8}} = a^0$.

22. $\sqrt{a^{x-1}} \times \sqrt[3]{a^{2x+1}} \times \sqrt[4]{a^{2-3x}} = 1$.

23. $\sqrt[3]{e^{2-y}} \times \sqrt[4]{e^{4-y}} \times \sqrt[6]{e^{5y-1}} = 1$.

24. $\frac{1}{a^{5x}} = \sqrt[3]{a^{6-13x}}$. 25. $\frac{1}{\sqrt[2z]{m}} = \sqrt[3z-7]{m^2}$.

26. $\left(\sqrt{n^{2x-3}} : \sqrt[4]{n^{4-3x}}\right) \times n^{-1} = 1$. 27. $3^x = 81$.

28. $5^z = 3125$. 29. $2^y = 64$. 30. $9^x = 729$.

31. $4^x = \frac{1}{64}$. 32. $\frac{1}{7^x} = 343$. 33. $\frac{1}{2^z} = \frac{1}{128}$.

34. $10^{-x} = 10000$. 35. $(-3)^x = 81$.

36. $\left(-\frac{1}{7}\right)^{-x} = 2401 \times (-7)$. 37. $\sqrt[x]{-8^5} = -32$.

38. $(-3)^x = -243$. 39. $\left(\frac{2}{3}\right)^z = \left(\frac{3}{2}\right)^{-5}$.

40. $\left(\frac{a}{b}\right)^{4x} = \left(\frac{b}{a}\right)^3$. 41. $\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{x}{2}} = \left(\frac{n}{m}\right)^4$.

42. $\sqrt[3]{\left(\frac{n}{m}\right)^x} = \sqrt[4]{\left(\frac{m}{n}\right)^{3-x}}$. 43. $16^x = 64$.

44. $729^x = 27$. 45. $125^x = 25$. 46. $125^x = 3125$.

47. $2^x = \frac{1}{8}$. 48. $(0,1)^x = 1$. 49. $1000^x = 100$.

50. $1000^x = 10\,000\,000$. 51. $\left(\frac{1}{125}\right)^x = 25^3$.

52. $100^x = 0,01$. 53. $(0,25)^x = 2^{12}$. 54. $\left(\frac{1}{0,125}\right)^x = 128$.

CHAPITRE IV

ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ (1).

I. ÉQUATIONS NUMÉRIQUES A UNE INCONNUE.

XXXIX

1. Équations incomplètes.

Qu'appelle-t-on équation *incomplète* du second degré? Qu'est-ce qu'une équation *complète?* Qu'entend-on par les *racines* d'une équation?

1. $x^2 = 49$. **2.** $y^2 = 25$. **3.** $x^2 = \frac{1}{4}$. **4.** $x^2 = \frac{25}{36}$.

5. $z^2 = 6\frac{1}{4}$. **6.** $x^2 - 5 = 11$. **7.** $x^2 + 4 = 13$.

(1) Les Hindous, qui ont atteint de très-bonne heure à un développement remarquable du calcul abstrait, résolvaient les équations du second degré et des degrés supérieurs par des opérations purement algébriques, tandis que les Grecs et les Arabes n'employaient que des procédés géométriques. Les Hindous faisaient des équations du premier degré un groupe à part auquel ils ramenaient toutes les autres; ils écrivaient les deux membres d'une équation l'un sous l'autre, en superposant les termes semblables; ceux qui manquaient s'écrivaient quand même, mais avec le coefficient zéro. Dès le VIe siècle de notre ère, les mathématiciens de l'Inde ont eu la notion des quantités négatives, auxquelles ils appliquaient les règles ordinaires du calcul; ils connaissaient l'interprétation des solutions négatives des problèmes, et savaient que le radical du second degré doit avoir un double signe. *Bhascara* et ses successeurs ne manquent jamais, avant de procéder au calcul, de chasser les dénominateurs des équations, ce que ne font ni *Diophante* ni les Arabes. — *Aryabhata* (né en 475 de notre ère) et *Bhascara* ne divisaient pas, comme le faisaient les Arabes, par le coefficient de x^2. Les auteurs hindous suivaient une règle qui répond à notre formule $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. *Bhascara* résout l'équation du second degré en l'abaissant au premier par un procédé qu'il attribue au docteur *Çridhara*, et qui prescrit : 1° de rendre le terme en x^2 un carré parfait; 2° de compléter le carré du premier membre ; 3° d'extraire la racine carrée des deux membres; 4° de résoudre l'équation du premier degré qui en résulte.

8. $x^2 - \frac{1}{2} = 8\frac{1}{2}$. **9.** $x^2 + \frac{3}{4} = 4\frac{3}{4}$. **10.** $x^2 - \frac{1}{8} = 6\frac{1}{8}$.

11. $3y^2 = 12$. **12.** $5y^2 = 45$. **13.** $\frac{z^2}{3} = 27$. **14.** $\frac{2z^2}{3} = 6$.

15. $\frac{5z^2}{6} = \frac{6}{125}$. **16.** $4x^2 - 7 = 2x^2 + 25$.

17. $5 - x^2 = 41 - 5x^2$. **18.** $8y^2 - 56 = 34 - 2y^2$.

19. $3(2x - 3)^2 = 4x(2x - 9) + 43$.

20. $2x + \frac{17}{x} = \frac{7x - 10}{2\frac{1}{2}} + 4$. **21.** $(x + 9)(x - 9) = 19 - 3x^2$.

22. $(x + 4)(2x + 9) = \left(2x + \frac{17}{2}\right)2x - 13$.

23. $\frac{2x - 1}{x - 2} = \frac{x - 5}{3x - 2}$. **24.** $\frac{4}{x + 3} - \frac{4}{x - 3} = -\frac{1}{3}$.

25. $\frac{1}{3x + 11} - \frac{1}{3x - 11} = -\frac{22}{23}$.

26. $\frac{1}{12 - 5x} + \frac{1}{5x - 12} = 1 + \frac{120x}{(12 - 5x)^2}$.

27. $\frac{5}{2 + x} - \frac{5}{x - 4} = \frac{2 - x}{x - 4} + \frac{2}{x^2 - 2x - 8}$.

28. $\frac{3x^2}{4} - \frac{15x^2 + 8}{6} = 2x^2 - 3$.

29. $\frac{x + 7}{x(x - 7)} - \frac{x - 7}{x(x + 7)} = \frac{7}{x^2 - 73}$.

30. $\frac{x - 3}{x^2 - 4} + 1 = \frac{1}{x - 2}$. **31.** $\frac{2x}{x - 2} + \frac{x - 2}{x} = 2$.

32. $\frac{2}{x + \sqrt{2 - x^2}} + \frac{2}{x - \sqrt{2 - x^2}} = x$.

33. $\frac{2}{\sqrt{2 + x} + 2} - \frac{2}{\sqrt{2 - x} - 2} = -\frac{16}{x^2 - 4}$.

34. $\frac{\sqrt{1 - z}}{2 - \sqrt{1 + z}} = \frac{\sqrt{1 + z}}{2 + \sqrt{1 - z}}$.

35. $\frac{1}{1 + \sqrt{1 - x}} + \frac{1}{1 - \sqrt{1 - x}} = \frac{2x}{9}$.

2. Equations complètes.

XL

Equations de la forme $x^2 + px + q = 0$.

1. $x^2 + 4x - 12 = 0$.
2. $x^2 + \frac{3x}{5} - 28 = 0$.
3. $x^2 - 6x = -9$.
4. $x^2 - 8x = -7$.
5. $x^2 + 6x = 187$.
6. $x^2 - 4x = 60$.
7. $x^2 + 10x - 56 = 0$.
8. $x^2 + 6x = 16$.
9. $x^2 - 2x = 48$.
10. $x^2 - 84 = -8x$.
11. $10x = 171 - x^2$.
12. $x^2 + 12 = 7x$.
13. $14 = x^2 - 5x$.
14. $60 - x^2 = -7x$.
15. $x(x - 1) = 380$.
16. $3x^2 - 5x = 10 + 2x^2 - 2x$.
17. $5x^2 - 18x = 630 - 9x + 4x^2$.
18. $250 + 2x^2 = 3x^2 - 15x$.
19. $6x^2 - \frac{7}{4} + 4x = x + 5x^2$.
20. $2 - 8x + 3x^2 = -4 + 2x^2 - 3x$.
21. $(3 + 5x)x - \frac{1}{9} = 3x\left(1 - \frac{5}{3x}\right) + x(15 + 4x)$.
22. $(x + 5)^2 = 2(x + 3)^2 - 17$.
23. $(3x - 2)^2 = 8(x + 1)^2 - 100$.
24. $(x - 5)^2 - 5 = (2x + 6)8 - x^2$.
25. $(2x - 8)^2 = (3x + 25)4 + 12$.
26. $\frac{x^2}{6} + \frac{2x}{3} = 10$.
27. $3(2x - 3) - \frac{22}{x} = \left(x - \frac{3}{2}\right)5$.
28. $\frac{9 - x}{2} + \frac{4}{x - 2} = \frac{(x - 1)3}{2}$.
29. $\sqrt{2x - 3} = x - 3$.
30. $\sqrt{2x - 5} + 6 = x + 2$.
31. $\sqrt{2x + 1} + 2\sqrt{x} = \frac{21}{\sqrt{2x + 1}}$.
32. $\frac{\sqrt{x}}{21 - \sqrt{x}} + \frac{21 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 2\frac{1}{2}$.

Equations de la forme $ax^2 + bx + c = 0$.

33. $5x^2 - 3x - 2 = 0$.

34. $3x^2 + 5x - 42 = 0$.

35. $9x^2 + 15x = 6$.

36. $5x^2 - 7x + \frac{6}{5} = 0$.

37. $3x^2 - 50 = 25x$.

38. $7x^2 - 9x = 10$.

39. $3x^2 - 7x - 6 = 0$.

40. $2x^2 - 13x = -15$.

41. $2x^2 - 8 = 3x + 12$.

42. $5x(x - 2) + 2 = -4 - x(4x - 5)$.

43. $3\left(x + \frac{33}{25}\right) - 13x^2 = 3x^2$.

44. $11x^2 + 7x - \frac{3}{7} = 4x(x + 1) + 1$.

45. $5x(x - 2) + \frac{1}{4} = 1 - 3x$.

46. $x(12x + 0{,}7) - \frac{7}{11} = x(3x - 0{,}2) + 6\frac{4}{11}$.

47. $11(x - 1)^2 + x = 2(1 - x)^2 + 11$.

48. $3(z^2 + 2)^2 - 54 = 3z^4 + z(5z - 7)$.

49. $(1 - 3x)(x - 6) = 2(x + 2)$.

50. $(2x - 3)(x - 2) - 49\frac{2}{3} = (x - 1)^2 + \frac{16}{3} - 2x^2$.

51. $(x - 1)(1 - 3x) - \frac{1}{3} = (x - \frac{1}{3})3 - 1$.

52. $(x + 1)(2x + 3) = 4x^2 - 22$.

53. $5(\frac{1}{8} + x)^2 + 4x = (3\frac{7}{8} - x)^2 - \frac{1}{2}$.

54. $(3x + 1)(2x - 3) + 3 = (x + 3)^2 - 15$.

55. $\frac{x - 3}{x + 4} + \frac{x - 4}{2(x - 1)} = \frac{1}{2}$.

56. $x - 3 + \frac{x + 6}{x - 6} = 2x - 7$.

57. $\frac{2x - 1}{3} - \frac{3}{x - 8} = \frac{x - 2}{x - 8} + 3$.

58. $\frac{3x + 2}{2x - 1} + \frac{7 - x}{2x + 1} = \frac{7x - 1}{4x^2 - 1} + 5$.

59. $\sqrt{3x^2 - 6x + \frac{8}{3}} = \sqrt{5x - 2x^2 - \frac{22}{9}}$.

60. $\sqrt{(x - 1)(3x - 6)} = x - 2$.

61. $\frac{\sqrt{2x - 1}}{\sqrt{x^2 - 9}} = \frac{3}{\sqrt{x + 11}}$.

62. $\frac{\sqrt{2x-3}}{3} + \frac{6}{\sqrt{2x-3}} = \frac{\sqrt{x-6}}{\sqrt{2x-3}} + \sqrt{2x-3}.$

63. $\sqrt{2(x-1)} = \sqrt[4]{3x^2-x+4}.$

64. $\sqrt[6]{8x^3+150x^2+31x+3} = \sqrt{2x+5}.$

Equations de la forme $ax^2 + 2bx + c = 0$.

65. $x^2 + 6x - 11\tfrac{1}{4} = 0.$

66. $x^2 - 4x + 2 = -\frac{14}{25}.$

67. $3x^2 - 6x = -\frac{5}{3}.$

68. $9x^2 + 12x - 5 = 7.$

69. $5x^2 - 8x + 3 = 0.$

70. $7x^2 - 48 = 2x(x+7).$

71. $(5x+1)^2 - 2(x+\tfrac{1}{5}) = 10x^2 + 16\tfrac{3}{5}.$

72. $(5x-2)(x+1) = (x+\tfrac{3}{5})5 - 5.$

73. $(3x+2)(x-3) = (6-x)5 + 4.$

74. $13x^2 - 30 = 6(1-x)^2 + 63.$

75. $(3x+2)(5x-2) = (5x-1)^2 - 17.$

76. $(1{,}2-x)^2 + (x+0{,}8)^2 = 2(6x-0{,}2)^2.$

77. $(0{,}7+x)^2 + (1{,}3-x)^2 - (1{,}6-2x)^2 = \frac{10x}{3}.$

78. $(3x+0{,}5)^2 + (5x-0{,}5)^2 = 6(3x-0{,}5)^2 + 4x.$

79. $\frac{x-2}{x-1} - \frac{x-3}{x+3} = \frac{x+4}{x-1} - \frac{7}{4}.$

80. $\frac{6}{2x-6} - \frac{1}{x-3} = \frac{x-5}{4}.$

81. $\frac{x-5}{x+3} + \frac{x-8}{x-3} = \frac{80}{x^2-9} + \frac{1}{2}.$

82. $\frac{2x+1}{7-x} + \frac{4x+1}{7+x} = \frac{45}{49-x^2} + 1.$

83. $\frac{\sqrt{10+x}}{\sqrt{10-x}} = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{10-x}} + 1.$

84. $\sqrt{2(x-3)} = \sqrt[4]{x^2-4x+11}.$

85. $\sqrt[6]{(3x+2)(5x-2)} = \sqrt[3]{2(x+2)}$.

86. $\sqrt{2x+7} = \sqrt{x} + 2$. **87.** $\sqrt{5x-4} = \sqrt{2x+1} + 1$.

88. $(3x-1)^{\frac{1}{2}} - \dfrac{5}{(x+1)^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{4\sqrt{2}-5}{(x+1)^{\frac{1}{2}}}$.

89. $(x+4)^{\frac{1}{2}} - (5x)^{\frac{1}{2}} = -(x-1)^{\frac{1}{2}}$.

90. $2\left(3x-\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} + 4\left(3x-\dfrac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 3\left(3x+\dfrac{5}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$.

91. $25x^2 - (x^4 - 6x^2)^{\frac{1}{2}} = 25x^2 - 3\sqrt{-1}$.

92. $2(3x-2) - \dfrac{1}{(3x-2)^{-\frac{1}{2}}} = 8(3x-2)^{\frac{1}{2}} + \dfrac{1}{25}(3x-2)^{\frac{3}{2}}$.

Les exemples suivants se rapportent à l'une ou à l'autre des formes ci-dessus.

93. $3x^2 - 5 + 2x + \dfrac{x^2}{3} = 5(x+1) - 2x^2 + 5x + 14$.

94. $2x^2 - 3x(x+1) - \dfrac{x^2}{5} = 7x^2 - 4x(x+3) - 60$.

95. $5x - \dfrac{2x^2}{3} - \dfrac{x-1}{5} = \dfrac{4x(x-3)}{3} - 5(x-2) + 1$.

96. $8x^2 + 16x - 20x(x+\frac{3}{4}) = 5x(4x+3) - 5\frac{1}{2}$.

97. $(x+\frac{1}{3})^2 + 3x(x-\frac{1}{3}) = (2x-\frac{1}{3})\dfrac{5}{3} - \left(2x-\dfrac{4}{3}\right)^2$.

98. $(x+0{,}3)^2 + (2x-0{,}4)^2 - (3x-1{,}1)^2 - (1{,}7-x)^2 = 0$.

99. $3(x+0{,}8)^2 - 6(1{,}2-x)^2 + 2(2x+0{,}6)^2 -$
$3(5x+62\frac{4}{5}) = 0$.

100. $(2x+0{,}2)^2 - (3x-0{,}7)^2 + (4x-1{,}6)^2 - (x+1{,}1)^2 = 0$.

101. $(10x-4)^2 + (x+0{,}4)^2 - (5x+1)^2 + 11(1{,}6-x) = 0$.

102. $(x+0{,}3)^2 - (2x-0{,}4)^2 + (2x+0{,}6)^2 - 4(1{,}7-x)^2 = 0$.

103. $(6x-1)^2 - (x+0{,}333..)^2 - 7 + 5(2x-0{,}33...)^2 = 6$.

104. $(3x+1)(6x-1) = 2(2x+0{,}66..)^2 + 1$.

105. $(x+1)(x-1) - (2x+3)(x-2) + (x-1)(11-x) = 0$.

106. $\frac{1}{3}(x+1)(x+2) - (x+3)(x+4) = (3x-1)(x-6)$
$-(8x-3)(x-5)$.

107. $(x+2)(x+3)-7+2(x+2)(x-1)+5(x-10)(x-1)+3x^2=0.$

108. $(1-x)(2-x)+(3-x)(4-x)+(5-x)(x-10)=0.$

109. $(x-1)(3x-1)+\frac{1}{3}(x+0{,}1)(x-0{,}39)+(x+0{,}1)^2-1=0.$

110. $3x(x+0{,}8)+(2x+0{,}6)(3x-0{,}6)-(4x-0{,}8)^2-0{,}2=0.$

111. $(x+1)^2+(2x-1)(1-x)=(x+2)(2x-1)-9{,}27.$

112. $(x+0{,}9)^2+(x-1{,}1)(2x-0{,}2)=(3x-4{,}3)^2+3(x-2{,}1).$

113. $\frac{x^2}{2}-\frac{x}{3}+\frac{59}{8}=8.$ **114.** $\frac{x^2}{4}-\frac{3x}{8}-\frac{7}{6}=1\frac{1}{3}.$

115. $\frac{x+1}{3}+\frac{3(x-1)}{4}=(x-3)^2+1.$

116. $\frac{2x+5}{5}-\frac{x-4}{3}=\frac{2x(x-7)}{6}-\frac{7x}{10}.$

117. $\frac{x-2}{6}+\frac{(x-4)(x-6)}{8}-\frac{2(16-x)(x-5)}{3}=0.$

118. $\frac{(x-8)(x-10)}{4}-\frac{(x-12)^2}{8}=\frac{x(x-15)}{5}+\frac{x}{10}.$

119. $\frac{(x-12)^2}{6}-\frac{x}{9}+\frac{x(x-9)}{18}=\frac{(x-14)^2}{2}+5.$

120. $\frac{x(2x-10)}{12}-\frac{(x-7)^2}{2}=\frac{(14-x)^2}{3}+(11-x)^2.$

121. $\frac{x-1}{3}+\frac{x-2}{7}-\frac{2x-7}{5}=\frac{x(x-15)}{8}.$

122. $\frac{(x+3)^2}{5}-\frac{(2x-20)(x-12)}{3}-\frac{7(x-6)}{2}=-\frac{x}{2}.$

123. $\frac{(x-20)(x-10)}{10}-\frac{(34-x)(40-x)}{2}+\frac{(30-x)(5-x)}{3}=0.$

124. $\frac{(x-20)(x-30)}{4}+\frac{2x(x-11)}{8}-\frac{(x-14)^2}{3}=(x+1)2.$

125. $\frac{(x-20)(2x-65)}{3} - \frac{(x-25)^2}{5} - \frac{x(x-29)}{8} = 0.$

126. $\frac{x(40-x)}{4} + \frac{(x-30)(x-28)}{5} = \frac{x(x-16)}{4} - 174.$

127. $\frac{(x-50)(x-20)}{16} - \frac{x(x-55)}{3} = \frac{(x-60)^2}{7} - 75.$

128. $\frac{x(x-50)}{21} + \frac{x(2x-101)}{42} - \frac{(x-60)^2}{3} =$
$\frac{(x-62)^2}{8} + 17\frac{1}{2}.$

129. $\frac{(x-80)^2}{40} + \frac{\{2(x-90)\}^2}{12} - \frac{(x-96)^2}{5} =$
$\frac{(x-50)(x-80)}{50} + \frac{x}{24} - 0{,}32.$

130. $\frac{(x-42)^2}{3} + \frac{(x-40)(x+2)}{5} + \frac{x(x-41)}{7} =$
$\frac{2x(x-37)}{11} + \frac{(x-40)(x-37)}{2}.$

131. $\frac{5x(x-96)}{16} - \frac{x^2}{1000} + \frac{(x+1)(x-90)}{101} =$
$\frac{(x-75)^2}{5} + (x-100)^2.$

132. $\frac{2x+3}{x} - x = x - 3.$ **133.** $3 - \frac{20-x}{x} = 3x - 15.$

134. $x - 5 + \frac{4}{x} = \frac{x-3}{x} - \frac{1}{4}.$

135. $\frac{30+x}{4} - \frac{8}{x} = \frac{(6-x)^2}{x} - \frac{10-x}{2}.$

136. $\frac{x+11}{x} = 7 - \frac{9+4x}{x^2}.$ **137.** $\frac{10}{x} - \frac{14-2x}{x^2} = \frac{22}{9}.$

138. $8x + 11 + \frac{7}{x} = \frac{21+65x}{7}.$ **139.** $\frac{6}{x} + \frac{x}{6} = \frac{5(x-1)}{4}.$

140. $\frac{x+3}{x} + \frac{18}{x^2} + 2 = \frac{4(x+3)^2}{9x^2} + \frac{18}{x}.$

141. $\frac{x+1}{3} - \frac{10}{x} = \frac{(x+1)}{2} - \frac{20-x}{x}.$

142. $\frac{x}{2} + \frac{(x+1)^2}{x} - \frac{x}{4} = \frac{(x+2)(x+1)}{x} - \frac{2}{x}.$

143. $\frac{(x-1)(x+1)}{x} + \frac{x+8}{3} - \frac{1}{x} = \frac{2}{x} - \frac{x+1}{x} + 2x.$

144. $\frac{x+1}{x-2} = \frac{3x-7}{x-1}.$

145. $\frac{2x-1}{x-3} = \frac{5x+2}{x+1}.$

146. $\frac{x+0,5}{2,5-x} = \frac{2x-0,5}{x+0,5}.$

147. $\frac{x+1}{x-5} = \frac{2x-1}{x-3}.$

148. $\frac{x-1}{x-5} = \frac{3x}{2x-7}.$

149. $\frac{3x+2}{x-2} = \frac{4x+5}{x-1}.$

150. $\frac{x-7}{2(x+3)} = \frac{x-6}{x+24}.$

151. $\frac{x+0,5}{x-0,5} = \frac{2x+1}{x+2,5}.$

152. $\frac{4x-1}{x+0,5} = \frac{6x}{x+2,5}.$

153. $\frac{3x-1}{4x+\frac{1}{3}} = \frac{2x+\frac{2}{3}}{5x+2\frac{2}{3}}.$

154. $\frac{x+1}{x-1} = \frac{4x-3}{x+9}.$

155. $\frac{2x-1}{x-4} = \frac{x+1}{x-7}.$

156. $\frac{x}{6} + \frac{35}{x+4} = 4\frac{1}{2}.$

157. $\frac{55}{16-x} - \frac{x}{6} = 4\frac{1}{2}.$

158. $\frac{6}{x^2-1} + \frac{3}{x+1} = \frac{2}{x-1} + 1.$

159. $\frac{2(x+7)}{x+1} + \frac{x-1}{x+1} = \frac{x+11}{x^2-1} + 4.$

160. $\frac{x+9}{x-3} + \frac{2(2x+1)}{x+3} = \frac{7}{2} + \frac{7(x+13)}{x^2-9}.$

161. $\frac{2x+1}{x+3} - \frac{x-1}{x^2-9} = \frac{x+3}{3-x} - \frac{4+x}{3+x}.$

162. $\frac{1}{x-3} + \frac{7}{x+3} = \frac{14}{x^2-9} - \frac{x-4}{x+3}.$

163. $\frac{x}{2x-1} + \frac{25}{4x^2-1} = \frac{13}{2x-1} + \frac{1}{27}.$

164. $\frac{15}{3x-1} - \frac{3}{4} = \frac{220}{9x^2-1} - \frac{11}{3x+1}.$

165. $\frac{8-x}{5(x^2-4)} + \frac{x+2}{x-2} + \frac{x-2}{x+2} = \frac{34}{15}.$

166. $\frac{x+4}{3x-7} - \frac{9}{19} - \frac{x}{3x+7} = \frac{52}{9x^2-49} - \frac{15}{52}.$

167. $\frac{1}{x-2} + 1 - \frac{6-x}{3(x^2-4)} - \frac{1}{2-x} = 0.$

168. $\frac{x+1}{x-1} + \frac{x+2}{x-2} - \frac{2x+13}{x+1} = 0.$

169. $\frac{x-1}{2x+3} - \frac{x+1}{2x-3} = \frac{x+7}{4x^2-9} - \frac{x-3}{2x-3}.$

170. $\frac{2x-1}{x+1} + \frac{3x-1}{x+2} - \frac{x-7}{x-1} = 4.$

171. $\frac{1}{18+x} - \frac{1}{7} = \frac{1}{11} + \frac{1}{x}.$

172. $\frac{1}{24+x} - \frac{1}{13} = \frac{1}{x} + \frac{1}{11}.$

173. $\frac{3x+1}{3(x-5)} - \frac{2x-7}{2x-8} - \frac{5}{2} = 0.$

174. $10x - \frac{14x-9}{8x-3} = \frac{18-40x^2}{3-4x} - 9.$

175. $\frac{x^2+2x+2}{x+1} + \frac{x^2+8x+20}{x+4} = \frac{x^2+4x+6}{x+2} + \frac{x^2+6x+12}{x+3}.$

176. $\frac{2x-3}{5} + \frac{1}{7}\left(5x - \frac{6x+4}{5x+1}\right) = x + \frac{5x+8}{3x-14} + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{7} + \frac{x-9}{5}\right).$

177. $\frac{x+3}{x+2} + \frac{x-3}{x-2} = \frac{3x+1}{2\left(x-\frac{4}{x}\right)} - \frac{12}{x^2-4}.$

178. $\left(\frac{x}{4} - \frac{x+2}{3}\right)3 + \frac{7x+4}{3x+2} = \frac{x}{4} - \frac{x^2}{2x-3} + \frac{x}{2x-3}.$

179. $(x-1)^{-1} - \frac{(x-1)^2}{x^3-1} = \frac{(x^3-1)^{-1}}{(19x^2-27x-1969)^{-1}}.$

180. $\frac{(x-1)^{-3}}{2^{-1}} - (x-1)^{-2} + \frac{3}{x-1} =$

$$\frac{1}{(10x^2-45x-683)^{-1}(x-1)^3}.$$

181. $(5x-17)(2x-3)^{-1} - \left(\frac{3x-2}{7x-16}\right)^{-1} + \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} =$

$$\frac{\frac{31}{x^{-2}} - 47x - 228}{(6x-9)(6x-4)}.$$

182. $\frac{13}{14} - \frac{5 - \frac{3}{x}}{6 + \frac{4}{x}} + \frac{7x-23}{6x\left(1 - \frac{3}{2x}\right)} = \frac{150x^2-37x-327}{42(2x-3)(3x+2)}.$

183. $3(2x+2)^{-1} - \frac{(x+1)(x^2+1)^{-1}}{2} =$

$$\frac{(3x^2-8x-98)(x+1)^{-1}}{x^2+1}.$$

184. $\frac{2x^2-3x}{x^4-1} - \frac{9}{8}(x^2+1)^{-1} + 2(x+1)^{-1} - \frac{10}{x^3-x^2+x-1}$

$$= \frac{2}{x-1} - \frac{4(x+7)}{x^3+x^2+x+1}.$$

185. $(x+1)(x-1)^{-1} - \frac{x^2+17}{x^2+x+1} + \frac{5}{x-1} = \frac{x+1}{x^3-1}$

$$- \frac{x+1}{x^2+x+1} + 35(x^3-1)^{-1}.$$

186. $\frac{x^2+10x}{x^4-1} + \frac{1}{(x+1)4^{-1}} = \frac{4x^2+21}{x^3+x^2+x+1} +$

$$\frac{1}{(x^4-1)(x+1)^{-1}}.$$

187. $\frac{4x^3-13x^2+\frac{2}{3}x-16}{54x^3+36x^2+24x+16} = \frac{2x-3}{9x+6} - \frac{4x^2-5x+6}{27x^2+12}.$

164. $\frac{15}{3x-1} - \frac{3}{4} = \frac{220}{9x^2-1} - \frac{11}{3x+1}$.

165. $\frac{8-x}{5(x^2-4)} + \frac{x+2}{x-2} + \frac{x-2}{x+2} = \frac{34}{15}$.

166. $\frac{x+4}{3x-7} - \frac{9}{19} - \frac{x}{3x+7} = \frac{52}{9x^2-49} - \frac{15}{52}$.

167. $\frac{1}{x-2} + 1 - \frac{6-x}{3(x^2-4)} - \frac{1}{2-x} = 0$.

168. $\frac{x+1}{x-1} + \frac{x+2}{x-2} - \frac{2x+13}{x+1} = 0$.

169. $\frac{x-1}{2x+3} - \frac{x+1}{2x-3} = \frac{x+7}{4x^2-9} - \frac{x-3}{2x-3}$.

170. $\frac{2x-1}{x+1} + \frac{3x-1}{x+2} - \frac{x-7}{x-1} = 4$.

171. $\frac{1}{18+x} - \frac{1}{7} = \frac{1}{11} + \frac{1}{x}$.

172. $\frac{1}{24+x} - \frac{1}{13} = \frac{1}{x} + \frac{1}{11}$.

173. $\frac{3x+1}{3(x-5)} - \frac{2x-7}{2x-8} - \frac{5}{2} = 0$.

174. $10x - \frac{14x-9}{8x-3} = \frac{18-40x^2}{3-4x} - 9$.

175. $\frac{x^2+2x+2}{x+1} + \frac{x^2+8x+20}{x+4} = \frac{x^2+4x+6}{x+2} +$
$\frac{x^2+6x+12}{x+3}$.

176. $\frac{2x-3}{5} + \frac{1}{7}\left(5x - \frac{6x+4}{5x+1}\right) = x + \frac{5x+8}{3x-14} +$
$\frac{1}{3}\left(\frac{x}{7} + \frac{x-9}{5}\right)$.

177. $\frac{x+3}{x+2} + \frac{x-3}{x-2} = \frac{3x+1}{2\left(x-\frac{4}{x}\right)} - \frac{12}{x^2-4}$.

178. $\left(\frac{x}{4} - \frac{x+2}{3}\right)3 + \frac{7x+4}{3x+2} = \frac{x}{4} - \frac{x^2}{2x-3} + \frac{x}{2x-3}.$

179. $(x-1)^{-1} - \frac{(x-1)^2}{x^3-1} = \frac{(x^3-1)^{-1}}{(19x^2-27x-1969)^{-1}}.$

180. $\frac{(x-1)^{-3}}{2^{-1}} - (x-1)^{-2} + \frac{3}{x-1} =$

$$\frac{1}{(10x^2-45x-683)^{-1}(x-1)^3}.$$

181. $(5x-17)(2x-3)^{-1} - \left(\frac{3x-2}{7x-16}\right)^{-1} + \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} =$

$$\frac{\frac{31}{x^{-2}} - 47x - 228}{(6x-9)(6x-4)}.$$

182. $\frac{13}{14} - \frac{5 - \frac{3}{x}}{6 + \frac{4}{x}} + \frac{7x-23}{6x\left(1 - \frac{3}{2x}\right)} = \frac{150x^2-37x-327}{42(2x-3)(3x+2)}.$

183. $3(2x+2)^{-1} - \frac{(x+1)(x^2+1)^{-1}}{2} =$

$$\frac{(3x^2-8x-98)(x+1)^{-1}}{x^2+1}.$$

184. $\frac{2x^2-3x}{x^4-1} - \frac{9}{8}(x^2+1)^{-1} + 2(x+1)^{-1} - \frac{10}{x^3-x^2+x-1}$

$$= \frac{2}{x-1} - \frac{4(x+7)}{x^3+x^2+x+1}.$$

185. $(x+1)(x-1)^{-1} - \frac{x^2+17}{x^2+x+1} + \frac{5}{x-1} = \frac{x+1}{x^3-1}$

$$- \frac{x+1}{x^2+x+1} + 35(x^3-1)^{-1}.$$

186. $\frac{x^2+10x}{x^4-1} + \frac{1}{(x+1)4^{-1}} = \frac{4x^2+21}{x^3+x^2+x+1} +$

$$\frac{1}{(x^4-1)(x+1)^{-1}}.$$

187. $\frac{4x^3-13x^2+\frac{2}{3}x-16}{54x^3+36x^2+24x+16} = \frac{2x-3}{9x+6} - \frac{4x^2-5x+6}{27x^2+12}.$

230. $\sqrt{7x+4} + \dfrac{11x+15}{\sqrt{4x-3}} = 7\sqrt{4x-3}.$

231. $\dfrac{\sqrt{3x^2+4} - \sqrt{2x^2+1}}{\sqrt{3x^2+4} + \sqrt{2x^2+1}} = \dfrac{1}{7}.$

232. $\dfrac{\sqrt{27x^2+4} + \sqrt{9x^2+5}}{\sqrt{27x^2+4} - \sqrt{9x^2+5}} = 7.$

233. $\dfrac{\sqrt{5x-4} + \sqrt{5-x}}{\sqrt{5x-4} - \sqrt{5-x}} = \dfrac{\sqrt{4x}+1}{\sqrt{4x}-1}.$

234. $\dfrac{\sqrt{3x^2+2x+9} - \sqrt{x^2-x-1}}{\sqrt{3x^2+2x+9} + \sqrt{x^2-x-1}} = \dfrac{2}{3}.$

235. $\dfrac{\sqrt{3x^3-15x^2-8x+4} - \sqrt{x^2-5x-2}}{\sqrt{3x^3-15x^2-8x+4} + \sqrt{x^2-5x-2}} = \dfrac{\sqrt{3x-2}-1}{\sqrt{3x-2}+1}.$

236. $\dfrac{\sqrt{4x^3-15x^2-12x+16} + \sqrt{2x^2-9x-4}}{\sqrt{4x^3-15x^2-12x+16} - \sqrt{2x^2-9x-4}} = \dfrac{\sqrt{2x+71}+1}{\sqrt{2x+71}-1}.$

237. $\dfrac{\sqrt{2x^2+3x+2} - \sqrt{x^2-3x+6}}{\sqrt{2x^2+3x+2} + \sqrt{x^2-3x+6}} = \dfrac{\sqrt{2x+12}-\sqrt{x+2}}{\sqrt{2x+12}+\sqrt{x+2}}.$

238. $\dfrac{\sqrt{7x-12} - \sqrt{x+1} + \sqrt{9x-2}}{\sqrt{7x-12} + \sqrt{x+1} + \sqrt{9x-2}} = \dfrac{3}{5}.$

239. $$\frac{\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}+\sqrt{2x-7}}{\sqrt{x-3}-\sqrt{5-x}+\sqrt{2x-7}}=\frac{\sqrt{9-2x}+\sqrt{5-x}+\sqrt{5x-19}}{\sqrt{9-2x}-\sqrt{5-x}+\sqrt{5x-19}}.$$

240. $$\frac{\sqrt{2}}{x}=\frac{3}{\sqrt{x+x^2}}-\frac{\sqrt{2}}{1+x}.$$

241. $$2\left(1+\frac{9}{x}\right)+3\sqrt{\frac{x+9}{x}}=14.$$

242. $$\frac{1}{(1+x+x^2)^{\frac{1}{2}}+(1-x+x^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{4}.$$

243. $$\frac{1}{(3x+5)^{-\frac{1}{2}}}+\frac{1}{(10-x)^{-\frac{1}{2}}}-\frac{1}{(x+12)^{-\frac{1}{2}}}=\frac{1}{(x+3)^{-\frac{1}{2}}}.$$

244. $$\frac{\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{x-3}}+\sqrt{x+3}=\frac{7}{\sqrt{x-3}}.$$

---

245. $3^{(x+2)(x-3)}=1.$

246. $8^{x^2+2x}=512.$

247. $5^{\frac{x^3-8}{x-2}}=5^{\frac{x^2-1}{x+1}}.$

248. $103x^2-9\,147x=71\,136.$

249. $263x^2-1\,386x=833\,729.$

250. $4\,353x^2+24\,791x=24\,861\,564\,574.$

251. $4\,253x^2-806\,810x=24\,298\,987\,287.$

252. $25x^2-33\,333x=6(2x)^2+11\,111x+701\,060\,205.$

Cas où a est très petit.

253. $0{,}000\,003x^2+2x+1=0.$

254. $0{,}000\,1x^2+4x+3=0.$

255. $0{,}000\,06x^2+5x+2=0.$

256. $\frac{1}{5145}x^2-12x+3=0.$

257. $0{,}000\,007x^2+8x-1=0.$

II. ÉQUATIONS LITTÉRALES A UNE INCONNUE.

XLI

1. Équations incomplètes.

1. $x^2 = 4b^2$. 2. $x^2 = 1 + a^2 + 2a$. 3. $x^2 = \frac{b}{a}$.

4. $x^2 + 2ab = a^2 + b^2$. 5. $x^2 - b^2 = a^2$.

6. $ax^2 = a^2$. 7. $x^2(a - 1) = a^2 - 1$.

8. $x^2(a + 1) = a^4 - 1$. 9. $mx^2 - n = p$.

10. $ax^2 + bx^2 = a^4 - b^4$. 11. $ax^2 = b^2 - cx^2$.

12. $a^2x^2 + b^2x^2 = a^4 - b^4$. 13. $\frac{mx^2}{n} = \frac{c}{p}$. 14. $\frac{2ax^2}{b} = \frac{1}{2c}$.

15. $\frac{x + m}{x - m} = \frac{p - x}{p + x}$. 16. $\frac{x^2 + a}{x^2 + b} = \frac{x^2 + c}{x^2 + d}$.

17. $x^2 + 2(mn + am - ax) = m^2 + n^2 + a(a - 2x) + 2an$.

18. $\frac{bx + a}{x} - m = \frac{ax - b}{x^2}$. 19. $\frac{x^2 + a}{x^2 - a} = \frac{m}{n}$.

20. $\frac{x + m}{x - m} + \frac{x - m}{x + m} = -\frac{4mn + 2n^2}{x^2 - m^2}$.

21. $\frac{x}{a^2} - \frac{b^2}{x} = \frac{x - 2b^2}{a^2x} - \frac{1}{a^2}$. 22. $\frac{a^2}{x} - \frac{x}{b^2} = \frac{x}{a^2 - b^2}$.

23. $(x + a)(x - a) + (x + b)(x - b) - (x + c)(x - c) = 0$.

24. $\left(\frac{a}{m} + \frac{x}{n}\right)\left(\frac{a}{m} - \frac{x}{n}\right) + \left(\frac{b}{o} + \frac{x}{p}\right)\left(\frac{b}{o} - \frac{x}{p}\right) = \frac{a^2}{m^2} - \frac{b^2}{o^2}$.

25. $(3a + b - x)(a + 3b - x) = 2(a + b - x)^2$.

26. $\left(\frac{a}{m} + \frac{x}{n}\right)\left(\frac{a}{m} - \frac{x}{n}\right) + \left(\frac{b}{n} + \frac{x}{m}\right)\left(\frac{b}{n} - \frac{x}{m}\right) -$
$\left(\frac{c}{p} + \frac{x}{r}\right)\left(\frac{c}{p} - \frac{x}{r}\right) = 0$.

27. $\dfrac{x^5 + a^5}{x + a} + \dfrac{x^5 - a^5}{x - a} = 2x^4.$

28. $\dfrac{x^4 - m^4}{x - m} - \dfrac{x^4 - m^4}{x + m} = 10m^3.$ 29. $\dfrac{n - x}{n + x} = \dfrac{x + p}{x - p}.$

30. $\dfrac{ab - x}{b - ax} = \dfrac{b - cx}{bc - x}.$ 31. $\dfrac{x + 3a - b}{x + 2a - b} = \dfrac{x - 4a + 5b}{3b - x + a}.$

32. $\dfrac{4a + b + x}{x + 2a - b} = \dfrac{x - 2a + b}{4a + b - x}.$

33. $\dfrac{17a + b - x}{a + 17b - x} = \dfrac{a^2(a + 17b + x)}{b^2(17a + b + x)}.$

34. $\dfrac{x^8 - a^8}{(x^4 + a^4)(x - a)} = x(x^2 + a^2) + a^4.$

35. $\dfrac{x^2 - 2bx + 2ax - b^2}{x^3 - a^3} + \dfrac{x + 2b}{x^2 + ax + a^2} = \dfrac{1}{x - a}.$

36. $\dfrac{a}{x} + \dfrac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} = \dfrac{x}{b}.$

37. $\sqrt{x + 2a - 3b} + \sqrt{x - 2a + 3b} = \dfrac{x + 2a + 3b}{\sqrt{x + 2a - 3b}}.$

38. $\dfrac{\sqrt{x^2 - 7m^2 + 8m^3}}{m - x} = \dfrac{\sqrt{x + m}}{\sqrt{m - x}}.$

39. $(x^2 - a)^{\frac{1}{2}} - (a^2 + ax - x^2)^{\frac{1}{2}} =$

$$\frac{\left[a^2(1-a) - ax(1-x) - 2\sqrt{(x-a)^2\{ax(ax + x^2 - a + 2x) - x^4\}}\right]^{\frac{1}{2}}}{(x - a)^{\frac{1}{2}}}$$

40. $\dfrac{\sqrt[3]{a^2 + x^2} + \sqrt[3]{a^2 - x^2}}{\sqrt[3]{a^2 + x^2} - \sqrt[3]{a^2 - x^2}} = \dfrac{a^2}{b^2}.$

41. $\dfrac{(x^2 - 2a^2)^{\frac{1}{2}} + b(2a - x^2)^{\frac{1}{2}}}{(x^2 - 2a^2)^{\frac{1}{2}} - b(2a - x^2)^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{\sqrt{a} + b}{\sqrt{a} - b}.$

42. $\dfrac{1}{1 - (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}} - \dfrac{1}{1 + (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{3^{\frac{1}{2}}}{x^2}.$

XLII

2. Équations complètes.

Équations de la forme $x^2 + px + q = 0$.

1. $x^2 + ax + b = 0$. 2. $x^2 - ax + b = 0$.
3. $x^2 + ax - b = 0$. 4. $x^2 - ax - b = 0$.
5. $ax + b = x^2$. 6. $x^2 + n = -mx$. 7. $x^2 - dx = g$.
8. $bx + c = x^2$. 9. $px + 4p^2 = x^2 - 2px$.
10. $bx - 2b^2 + x^2 = 2bx$. 11. $x^2 + dx - h^4 = 3h^4 - \frac{d^2}{4}$.
12. $x^2 - \frac{x}{a} = \frac{3}{4a^2}$. 13. $x^2 + \frac{5}{4m^2} - 1 = \frac{x - m}{m}$.
14. $x^2 - cx + d^2 = -\frac{c^2}{4}$. 15. $x^2 + mn = -(m + n)x$.
16. $x^2 - (n + p)x = -np$. 17. $x^2 - \frac{m^2 + n^2}{mn}x = -1$.
18. $x^2 + \frac{3nx}{2} - n^2 = \frac{11n^2}{16}$. 19. $cx - 2c - x^2 = -2x$.
20. $x^2 - \frac{ax}{2} = \frac{a^2}{2}$. 21. $x^2 + \frac{mx}{3} = \frac{2m^2}{3}$.
22. $x^2 - \frac{3px}{5} = -\frac{p^2}{20}$. 23. $x^2 - \frac{5bx}{3} = -\frac{b^4}{4}$.
24. $x^2 - \frac{3(a^2 + b^2)}{4} - ax = \frac{b}{2}(3a + 2x)$.
25. $(m - 1)^2x^2 - m(x + n) = mx^2(m - 2) - nx$.
26. $(x + a)(x - b) + ab = 2x^2 - ab$.
27. $(m + x)(x - n) = 2(x - n)^2 + mn$.
28. $\frac{x}{a}\left(1 + \frac{x}{b}\right) + 1 + \frac{x}{b} = 0$.
29. $x\left(\frac{x}{b^2} + \frac{1}{a}\right) - \frac{x}{2b}\left(\frac{x}{a} + 5\right) = -\frac{1}{2a}$.

30. $\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} - \frac{1}{x-c} = 0.$

31. $\frac{x}{a+x} + \frac{a+x}{x} = \frac{4m}{n}.$

32. $\frac{x}{x+a} + \frac{2x}{x-a} = \frac{5a^2}{4(x^2-a^2)}.$

33. $\frac{1}{a+b+x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{x}.$

34. $\frac{x+a}{x-a} - \frac{x+b}{x-b} = 1.$ 35. $ab\sqrt{a-x} = (a-x)\sqrt{x}.$

36. $\sqrt{(a+x)^3} = (a+b+x)(a+x).$

37. $\frac{x^3}{\sqrt{a^2+x^2}} - x\sqrt{a^2+x^2} = \frac{x\left(3a^2 - x + \frac{6a^4}{x}\right)}{2\sqrt{a^2+x^2}}.$

38. $x - (a+b)\sqrt{x} = 2a(a-b).$

39. $x + cd = (c+d)\sqrt{x} + 2(c-d)^2.$

40. $\frac{\sqrt{x+m} + \sqrt{-n}}{\sqrt{m} + \sqrt{n-x}} = \frac{\sqrt{x+m} - \sqrt{-n}}{\sqrt{m} - \sqrt{n-x}}.$

Équations de la forme $ax^2 + bx + c = 0.$

41. $mx^2 + nx = p.$ 42. $mx^2 - nx = p.$

43. $3x^2 + ax = b.$ 44. $2x^2 - 3ax = 2a^2.$

45. $p - ax = -bx^2.$ 46. $cx^2 + 5ax = 5a + c.$

47. $ax^2 + 5a^2x = -\frac{9a^3}{4}.$ 48. $2x^2 - (a+b)x + \frac{ab}{2} = 0.$

49. $(x-p)^2 = 5px - (x+p)^2.$

50. $2ax^2 - (x+5a)bx = -2b^2(x+a).$

51. $(2a+x)(2a-x) = 15ab - 9b^2 - 3ax.$

52. $(x+a)(x-2b) + ab = \frac{3(a+b)^2}{4} - bx.$

53. $(x^2+px+p^2)(x+p) = (x^2+p^2)(x-2p) + 6p^3.$

54. $acx^2 - bcx + adx - bd = 0.$

55. $\frac{bx}{c}(acx + b) + \frac{3a^2x}{c} = \frac{6a^2 + ab - 2b^2}{c^2}.$

56. $(a - b)x^2 + \frac{ab}{a - b} = (a + b)x.$

57. $abx^2 = \frac{1}{ab}\left(x(a + b) - \frac{1}{ab}\right).$ 58. $\frac{x - a}{a} = \frac{b}{2x - b}.$

59. $\frac{3a}{x + a} + \frac{2a}{x + 2a} - \frac{a}{x + 3a} = \frac{4a}{x}.$

60. $(a - x)^2 - (a - x)(b - x) = -(x - b)^2 + \frac{3(a - b)^2 + 4a^2b^2}{4}.$

61. $(a + d)x^2 - \frac{a^2(bc + 1)}{2(a + d)} + \frac{bc(bc - 2d^2 + 2)}{4(a + d)} = (a^2 - bc + d^2)x + \frac{bc - a^2}{2(a + d)}.$

62. $\sqrt{ax^2 - bx - b} = \sqrt{-ax}.$ 63. $\frac{4x}{a - b} = \frac{1}{\sqrt{a} - x}.$

64. $\frac{\sqrt{ax + b} + \sqrt{ax}}{\sqrt{ax + b} - \sqrt{ax}} = \frac{1 + \sqrt{ax - b}}{1 - \sqrt{ax - b}}.$

65. $\frac{\sqrt{a + x} + \sqrt{x - a}}{\sqrt{b + 2x} + \sqrt{b - x}} = \frac{\sqrt{x + a} - \sqrt{x - a}}{\sqrt{b + 2x} - \sqrt{b - x}}.$

66. $\sqrt{\frac{x^2 - 3ax - \frac{7}{3}a^2 + 1}{4x^2 - 4ax + a^2}} = \frac{1}{2x - a}.$

67. $\frac{\sqrt{x + a}}{\sqrt{3x^2 - 5ax + \frac{4a^2}{3} + 1}} = \frac{\sqrt{x^2 + 3ax + 2a^2}}{\sqrt{x + 2a}}.$

Équations de la forme $ax^2 + 2bx + c = 0.$

68. $ax^2 - 2bx = c.$ 69. $ax^2 + 2bx = -c.$

70. $px^2 - 4qx = m.$ 71. $-mx^2 - c = 4mx.$

72. $c^2x^2 = 8cx + a^2 + 8a.$ **73.** $35a^2 + 3x^2 = 22ax.$

74. $21a^2b^2 - 44abx = -15x^2.$ **75.** $(a - x)^2b = (b - 1)x^2.$

76. $(m - x)(n + x) = x(n - m + 2x) - \frac{mn}{3}.$

77. $(a + x)^2b = (a + b)^2 - x^2 - \frac{b^2(2a + b)}{b + 1}.$

78. $(x + a)(3x - b) = (3b - a)x - (a - b)^2 - ab.$

79. $(a + b + x)(a + b - x) = 2(a - b - x)(a + b + x).$

80. $ax\left(\frac{ax}{b^2} - \frac{1}{c}\right) + \frac{1}{c}\left(\frac{b^2}{c} - ax\right) = 0.$

81. $\frac{4b}{a} + \frac{a - 4b}{x - 2b} = \frac{a + 4b}{x + 2b}.$

82. $\frac{x^2}{4a - 13} - \frac{x(1 + 3a)}{2a - 6\frac{1}{2}} = -\frac{5a + 1}{4a - 13} + a^2.$

83. $\frac{1}{x} + \frac{1}{x - 2a^2} - \frac{1}{b^2} = 0.$

84. $\frac{1}{x + a} + \frac{1}{x + b} - \frac{1}{x + c} = 0.$

85. $\frac{1}{a} + \frac{1}{a - x} + \frac{1}{a - 2x} = 0.$

86. $\frac{1}{a} + \frac{1}{a + x} + \frac{1}{a + 2x} = 0.$

87. $\frac{1}{x - a} + \frac{1}{x - 2a} + \frac{1}{x - 3a} = 0.$

88. $\frac{a}{x - a} - \frac{2a}{x - 2a} + \frac{3a}{x - 3a} = 0.$

89. $\frac{x(a + 4x)}{2a - 3x^2} = \frac{a - 4x}{3x}.$ **90.** $\frac{x}{a - x} - \frac{a - x}{x} = \frac{a}{x}.$

91. $x^2 + \frac{2x}{a} + \frac{4x}{b} - \frac{5}{ab} + \frac{4}{b^2} + \frac{1}{a^2} = 0.$

92. $36x^2 - 2a^2\{(3a - 4) - 4a + 4\} = -6a(a^2 + x^2) + 8(2a + a^3) - 48(a - 1)x.$

93. $\sqrt{a + x} - \sqrt{a - x} = \sqrt{a}.$

94. $\sqrt{6x^2 + 5a^2 + 2ax} = a + 3x.$

95. $\sqrt{10ax - x^2 + 25a^2} = x + 3a.$

96. $\sqrt{\dfrac{(3x + 2b)x + \frac{2}{3}(\frac{1}{2}b^2 - 2ab)}{3}} = \dfrac{a - b}{3}.$

97. $\dfrac{m - \sqrt{2mx - x^2}}{m + \sqrt{2mx - x^2}} = a.$ **98.** $\sqrt{x} + \sqrt{2a - x} = \dfrac{a}{\sqrt{x}}.$

99. $\dfrac{2x(\sqrt{a + x} + \sqrt{a - x})}{\sqrt{a + x} - \sqrt{a - x}} = x + 2a.$

100. $\dfrac{ax - \sqrt{b^2x}}{ax + \sqrt{b^2x}} = \dfrac{2b^2 - a^2x}{a^2x - b^2}.$

101. $\dfrac{\sqrt{x} + \sqrt{b}}{\sqrt{x} - \sqrt{b}} = \dfrac{\sqrt{a - x} + \sqrt{b - x}}{\sqrt{a - x} - \sqrt{b - x}}.$

Les équations suivantes se rapportent tantôt à l'une, tantôt à l'autre des formes ci-dessus.

102. $abcx^2 - a^2b^2x + c^4x - abc^3 = 0.$

103. $abx^2 - (a^2 - b^2)x - ab = 0.$

104. $x(x - 5a) - b(x + 6b) = - a(6a + 5b).$

105. $4b(b - x) = (a + x)(a - x).$

106. $b(a - x) - c(a + x) = x(a - x) - 2c(b - c).$

107. $x(x - 2b) + a(b - x) + 2c(a - 2c) = - b^2.$

108. $x^2 - (a^2 + b^2)x = 2ab(x - a^2 - b^2).$

109. $ax(cx - 3b) = 5d(3b - cx).$

110. $a^5x(c^4x - a^3b) = (a^3b - c^4x)b^2c^3.$

111. $p^3x(m^6p^2x - n^4) + n^2x(m^3 - n^2p^3) = n^2\left(\dfrac{4n^4}{m^3p^2} - m^3x\right).$

112. $a^4b^2c^2(a^2bx - c^3)x + b^2c^3\left(\dfrac{4b^3d^7}{a} - a^4c^2x\right) = 2ab^6d^7x.$

113. $x(x + b^2 - b) = ax(a + 1) - (a + b)^2(a - b).$

114. $6amx - 3a^2x + x^2 - 9am(a^2 - am) = 3m^2x + 9am^3.$

115. $(x - 3a)^2 + 4b^2 = x(a + 3b) + 16b^2 - 4b(x - 3a) - a(3a + 5b).$

116. $9b^2 - 41a^2 + 6b(x - 7a) = -(x - 7a)^2 - 8b(5a - 3b) + 8x(b - a)$.

---

117. $a^{-3}b^2c^{-2}(1 - a^{-2}bc^{-1}x)x + a^{-2}cd^{-1}x = b^{-1}c^2d^{-1}$.

118. $a^{-1}b^{-3}x^2 + (5a^{-3}b^{-1}c - 3a^{-2}bc^{-3})x = 15a^{-4}b^3c^{-2}$.

119. $3a^{-1}b^{-2}d^{-3}x^2 - 6a^{-2}b^{-3}x = -12a^{-5}d^{-4}c^{-1}x + 24a^{-6}b^{-1}c^{-1}d^{-1}$.

120. $a^{-2}bx^2 + \dfrac{c^{-6}d^2 + 6a^{-1}c^{-5}d - 8a^{-2}c^{-3}d}{4a^{-2}b} = 3a^{-1}c^{-2}x + c^{-3}dx - 4a^{-2}x$.

121. $(2p^{-2}x + 2a^{-1}p^{-2})x = -2a^{-1}p^{-2}x + 8a^{-2}q^{-1}(x + 2a^{-1})$.

122. $(a^{-m}x - 10a^{-p}b)x - 4b^{-n}c^{-1}x = 2b^{-n}c^{-1}x - \dfrac{60a^{-p}b^{1-n}c^{-1}}{a^{-m}}$.

123. $x + 2a^{-1} - 4n^{-2p} = -(a^{-2} - 4a^{-1}n^{-2p})x^{-1}$.

124. $b^{-4} + \dfrac{6a}{x} - c^{-2} = \dfrac{4b^{-2}}{x} - \dfrac{\{(3a - 2b^{-2})^2 - 9a^2\}x^{-2}}{b^{-4} - c^{-2}}$.

125. $b^{-1}c^4 + c^4x^{-1} - b^{-1}x^{-1} - x^{-2} + \dfrac{1}{x^2} = -\dfrac{(b^{-1}c^{-4} - 2 - 3bc^4)x^{-2}}{4b^{-1}c^4}$.

126. $(a^{-5}x^{-1} + b^{-m}d^{-p})(b^{-m}x^{-1} - a^{-1}d^{-p}) = a^{-5}b^{-m}x^{-2} - \dfrac{2a^{-6}b^{-2m}d^{-2p} - a^{-12}d^{-2p}}{4a^{-1}b^{-m}d^{-2p}} \cdot x^{-2}$.

127. $(m^{-a} - n^{-p}x^{-1})(n^{-r} - b^{-2}x^{-1}) = -\dfrac{(2b^{-2}m^{-a}n^{-(p+r)} + m^{-2a}b^{-4})x^{-2}}{4m^{-a}n^{-r}} + b^{-2}n^{-p}x^{-2}$.

128. $\left\{8a^{-3}b^{-n} - \dfrac{b^{-2(n+2)} + 3a^{-2(m+3)} + 4a^{-(m+3)}b^{-(n+2)}}{a^{-m}b^{-2}}\right\}x^{-2} = (a^{-m} - 2b^{-n}x^{-1})(b^{-2} - 4a^{-3}x^{-1})$.

---

129. $(x - a)(x - b) - (a - x)(x - b) = 0$.

130. $(x + m - n)(x - m + n) + (x - m + n)(x + m - n) = 0$.

131. $(x + a + b)(x - a + b) + (x + a - b)(x - a - b) = 0.$

132. $(x + a + b - c)(x + a - b + c) +$
$(x - a - b + c)(x - a + b - c) = 0.$

133. $(a + 3bx)(3b - ax) + (3b + cx)(c - 3bx) +$
$(c + ax)(a - cx) = 0.$

134. $(2b + m^2x)(m^2 - 2bx) + (m^2 + 5cx)(5c - m^2x) +$
$(5c + 2bx)(2b - 5cx) = 0.$

135. $\frac{1}{2}(m^2 + n^2 + p^2) = (m + nx)(mx - n) +$
$(n + px)(nx - p) + (p + mx)(px - m).$

136. $c^2d^2 + a^2 + x^2 = 2acd + 2cdx + 2ax.$

137. $x^2 - (p^2 + r^2)x + (p^2 - r^2)pr = 0.$

138. $x^2 + (4m^2 - n^2)2mn = (4m^2 + n^2)x.$

139. $x^2 - (4m^2 + n^2)x - (4m^2 - n^2)2mn = 0.$

---

140. $\frac{x}{m} - \frac{m}{x} = \frac{x}{p} - \frac{p}{x}.$ 141. $\frac{x}{p} + \frac{p}{x} = \frac{x}{m} + \frac{m}{x}.$

142. $\frac{a}{x - a} + \frac{b}{x - b} = \frac{2c}{x - c}.$

143. $\frac{1}{x} + \frac{1}{x + d} = \frac{1}{c} + \frac{1}{c + d}.$ 144. $\frac{p^2 + x^2}{p^2 - x^2} = \frac{p + 2x}{p - 2x}.$

145. $\frac{3a - 2b + 3x}{a - 2b + x} = \frac{x - 7a + 8b}{3x - 5a + 4b}.$

146. $\frac{a + 4b + x}{a - 4b + x} = \frac{3b - a + x}{3b + a - x}.$

147. $\frac{1}{x + a} + \frac{1}{x + 2a} + \frac{1}{x + 3a} = \frac{3}{x}.$

148. $\frac{x + 3a - 2b}{x - 3a + 2b} = \frac{3x - 7a - d}{x + 7a + d}.$

149. $\frac{2x + b + 3c}{b - 3c - 2x} = \frac{x - 2b + c}{x + 2b - c}.$

150. $\frac{ax^2 - bx + c}{mx^2 - nx + p} = \frac{c}{p}.$ 151. $\frac{a + b - x}{a - b - x} = \frac{a - c + x}{a - c - x}.$

152. $\frac{x + a + b}{x + a - b} = \frac{a - b - x}{x - a + b}.$

153. $\frac{x+2a-b}{2x-3a+2b} = \frac{2x-2a-b}{x+3a-2b}.$

154. $\frac{x+4a-b-3c}{2x-3a-b-4c} = \frac{3x+2a+b+3c}{2x-a+b+4c}.$

155.[1] $\frac{ab(x^2-a^2)+ax(a^2-b^2)}{ab(x^2+a^2)+ax(a^2+b^2)} = \frac{4b-x}{x-b}.$

156. $\frac{\{(a+x)^2+(a-x)^2\}(ax^3-a^3x)}{\{(a-x)^2-(a+x)^2\}(a^2+x^2)} = \frac{\frac{15}{16}a^2(a+x)}{a-2x}.$

157. $\frac{x^6+a^6-2a^2x^2(x^2+a^2)+a^2x^2(a^2+x^2)}{2(x^4-a^4)} =$

$\frac{(2\frac{1}{2}-3a)ax^2-a^3x+\frac{1}{2}a^4}{(5-a)a}.$

158. $\frac{x^4+ax^3-9a^2x^2+11a^3x-4a^4}{x^4-ax^3-3a^2x^2+5a^3x-2a^4} = \frac{x-3a}{7a-x}.$

159. $\frac{x^2-(a+b)x+ab}{x^2+(a-b)x-ab} = \frac{x^2+2ax-3a^2}{x^2-3ax+a^2}.$

160. $\frac{2x^4+2b^2x^2-2bx^3-2b^3x}{4x^4-2b^2x^2-4bx^3+2b^3x} = \frac{x-b-b^2}{2x-2b+b^2}.$

161. $\frac{x(b+c)(b-c)+b(x+c)(c-x)+c(x+b)(x-b)}{x^2+2p^2x-3p^4}$

$= \frac{(x-b)(c-x)(b-c)}{8p^2x-3x^2+p^4}.$

---

162. $\sqrt{x-m} - \sqrt{x-n} = \sqrt{n-m}.$

163. $b\sqrt{b^2-x^2} - \frac{b(x^2-7b^2)}{\sqrt{b^2-x^2}} = 0.$

164. $\sqrt{x^2+x+1} = a - \sqrt{x^2-x+1}.$

165. $\sqrt{(m^2+x)(p^2-x)+2m^2x+\frac{(p+m)^4}{8}} = pm - x.$

(1) Simplifiez d'abord le premier membre.

166. $\sqrt{x} + \sqrt{a - \sqrt{ax + x^2}} = \sqrt{a}.$

167. $\sqrt{a - x} + \sqrt{-(a^2 + ax)} = \dfrac{a}{\sqrt{a - x}}.$

168. $x + a\sqrt{x^2 - b^2} = -\dfrac{ax^2 + ab^2}{\sqrt{x^2 - b^2}}.$

169. $\dfrac{a}{x + \sqrt{x^2 - a + b}} - \dfrac{a}{x - \sqrt{x^2 - a + b}} = x.$

170. $\sqrt{\dfrac{x}{b}} + \sqrt{b^3x + 4ab} = \sqrt{b^3x + \dfrac{x}{b} + 4ab + \dfrac{3a}{b}}.$

171. $\dfrac{\sqrt{4a^2 - x^2} + p\sqrt{4a - x}}{\sqrt{4a^2 - x^2} - p\sqrt{4a - x}} = \dfrac{\sqrt{a} + p}{\sqrt{a} - p}.$

172. $\dfrac{\sqrt{a + x} + \sqrt{a - x}}{\sqrt{x + b} + \sqrt{x - b}} = \dfrac{\sqrt{a + x} - \sqrt{a - x}}{\sqrt{x + b} - \sqrt{x - b}}.$

173. $\dfrac{a + \sqrt{a^2 + x^2}}{a - \sqrt{a^2 + x^2}} = \dfrac{a}{b}.$ **174.** $\dfrac{\sqrt{a - x}}{x} - \dfrac{\sqrt{a - x}}{a} = \sqrt{x}.$

175. $\dfrac{\sqrt{a - x} + \sqrt{x - b}}{\sqrt{a - x} - \sqrt{x - b}} = \sqrt{\dfrac{a - x}{x - b}}.$

176. $\dfrac{\sqrt{3a - 4b + 5x} + \sqrt{x - a}}{\sqrt{3a - 4b + 5x} - \sqrt{x - a}} = \sqrt{\dfrac{x + a}{2(x - b)}}.$

177. $\dfrac{\sqrt{a + 3b + x} + \sqrt{9a + 11b - 7x}}{\sqrt{a + 3b + x} - \sqrt{9a + 11b - 7x}} = \sqrt{\dfrac{3a + b - x}{2(a + 3b - x)}}.$

178. (1) $\dfrac{\sqrt{a - bx} + \sqrt{c - mx}}{\sqrt{a - bx} + \sqrt{nx - d}} = \dfrac{\sqrt{a - bx} - \sqrt{c - mx}}{\sqrt{a - bx} - \sqrt{nx - d}}.$

179. $\dfrac{\sqrt{(a - x)^2} + \sqrt{(a - x)(b - x)} + \sqrt{(b - x)^2}}{\sqrt{(a - x)^2} - \sqrt{(a - x)(b - x)} + \sqrt{(b - x)^2}} = \dfrac{7}{3}.$

(1) Suivant comment on conduira le calcul, cette équation s'abaissera au premier degré, mais elle a deux racines. Quelques autres équations de ce paragraphe peuvent de même être abaissées au premier degré.

180. $\dfrac{\sqrt{(a-x)^2}+\sqrt{(a-x)(x-b)}+\sqrt{(x-b)^2}}{\sqrt{(a-x)^2}-\sqrt{(a-x)(x-b)}+\sqrt{(x-b)^2}}=3.$

181. $\dfrac{\sqrt[3]{(27a+8x)^2}}{15\sqrt[15]{x^{13}}}+\dfrac{8\sqrt[15]{x^2}}{3\sqrt[3]{27a+8x}}=\dfrac{8}{5\sqrt[5]{x}}.$

XLIII

3. Exercices sur quelques procédés particuliers de calcul [1].

Dans certains cas, il y a avantage à employer, pour résoudre une équation, des artifices, qui abrégent ou facilitent les opérations. Voici en quoi consistent quelques-uns de ces artifices.

1° On met l'équation sous la forme d'un produit qu'on égale à zéro, ou de deux produits qu'on égale. Chacune des valeurs de l'inconnue qui transforme l'équation en une identité est racine de l'équation. Ex. :

$x^2-ax-6a^2=0$, qu'on peut écrire : $(x+2a)(x-3a)=0$.

On voit que l'équation est satisfaite quand on a $x+2a=0$, d'où $x=-2a$, ou $x-3a=0$, d'où $x=3a$. — Par ce procédé, on décompose l'équation primitive en deux autres dont la solution est plus simple.

2° On fait usage d'une inconnue auxiliaire.

3° Dans certains cas, la forme même de l'équation permet de découvrir par un simple coup d'œil quelle est l'une des racines.

Ex. : $(a-x)^2-(b-x)^2=(a-b)^2$.

Ici b est évidemment une des racines, car si l'on fait $x=b$, l'équation devient une identité. Pour trouver la seconde racine, on réunit tous les termes dans le premier membre, et on divise par $x-b$; le quotient égalé à zéro donne la seconde racine.

(1) Plusieurs équations de ce paragraphe et des deux suivants sont tirées de deux excellents ouvrages : Dr E. Bardey, *Algebraische Gleichungen. — B. G. Teubner, Leipzig, 1868.* — Todhunter, *Theory of Equations, 3e édit. Macmillan and Ce, Londres 1875.* — Ce paragraphe pourra être omis dans un premier cours.

$$= 3.$$

CHAPITRE PREMIER

PUISSANCES

PUISSANCES MARQUÉES PAR DES EXPOSANTS ENTIERS POSITIFS (1)

I

...rticuliers

...ur résoudre
... les opéra-
...rtifices.
...qu'on égale
...les valeurs
... est racine

$... 3a) = 0.$
$... - 2a = 0,$
...Par ce pro-
...res dont la

...permet de
...s racines.

...t $x = b$,
...le racine,
... on divise
...racine.

...sont tirées
...
...s, 2e édit.
...

4° On sait que si l'on a la proportion $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, elle donne :

$$\text{I. } \frac{a \pm b}{a \text{ ou } b}=\frac{c \pm d}{c \text{ ou } d}; \quad \text{II. } \frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}; \quad \text{III. } \frac{a \pm c}{b \pm d}=\frac{a}{b}.$$

L'application de ces trois théorèmes facilite beaucoup la résolution d'équations comme celles des numéros 231 à 239 paragraphe XL; 144 à 154 et 171 à 180, paragraphe XLII.

REMARQUES. — *a*) Toute équation, ramenée ou non à la forme $Ax^2+Bx=0$, qui a un facteur x a nécessairement une racine égale à zéro. Ex. :

$$mx^2-nx=0; \qquad ax^2-bx=(p-q)x.$$

b) Il arrive assez fréquemment que l'une des deux racines ne satisfait pas à l'équation donnée, mais à une autre qu'on obtiendrait en changeant le signe d'un des termes renfermant l'inconnue.

c) Quand, pour ramener une équation à une forme rationnelle, il a fallu élever les deux membres au carré, il se peut qu'aucune des racines qu'on obtient ne satisfasse à l'équation proposée. Cela vient de ce que le radical, qui possède toujours le double signe, a été pris avec un signe qui ne lui convenait pas. Il est donc nécessaire, en pareil cas, de déterminer le signe du radical. Ainsi soit l'équation :

$$x-3\sqrt{x^2-5x+5}=7.$$

Elle donne pour les deux racines 4 et $-\frac{1}{8}$. Aucune de ces valeurs ne satisfait à la proposée. Mais si l'on donne au radical le signe —, l'équation devient $x+3\sqrt{x^2-5x+5}=7$, et les denx racines la vérifient.

---

1. $(x-5)(x-3)=0$.
2. $(x-7)(x+1)=0$.
3. $(x-3)(x+3)=0$.
4. $(x-4)(x+9)=0$.
5. $(x-a)(x-b)=0$.
6. $(x-a+3)(x+b-a)=0$.
7. $\left(x-\frac{a}{2}+1\right)\left(x+\frac{b-m}{3}\right)=0$.

8. $(x - 8)(x - 10) = 5.3.$

9. $(x - 3)(x - 4)(x - 5) = 3.2.1.$

10. $(x - 2)(x - 3)(x - 4) = 60.$

11. $x^2 - 2x - 35 = 0.$ 12. $x^2 - \frac{1}{6}x - \frac{1}{6} = 0.$

13. $x^2 + 3ax = abx + 3a^2b.$ 14. $x^2 + 3a^2x = 4b^2x + 12a^2b^2.$

15. $2x^2 - 3ax = 4a^2x - 6a^3.$

16. $(a - x)(m - x) = (a - x)(x - 2n).$

17. $(x^2 - 9)(x + 3) = 0.$

18. $\frac{x + a}{x - a} - \frac{x - a}{x + a} = \frac{b + x}{b - x} - \frac{b - x}{b + x}.$

19. $\frac{(a - x)\sqrt{a - x} + (x - b)\sqrt{x - b}}{\sqrt{a - x} + \sqrt{x - b}} = a - b.$

20. $\frac{(x - a)\sqrt{x - a} + (x - b)\sqrt{x - b}}{\sqrt{x - a} + \sqrt{x - b}} = a - b.$

21. $\frac{2x^2}{3m^2} + \frac{(x + a)2x}{3pm} = \frac{x^2 + bx}{2mr} + \frac{(x + a)(x + b)}{2pr}.$

22. $\frac{ax}{1 - x^2} + \frac{bx}{(1 + x)(x - a)} = \frac{2a^2}{b(1 - x)} + \frac{2ab}{b(x - a)}.$

---

23. $3(x - 3a)^2 + 2m(x - 3a) = m^2.$

24. $3(x^2 + b^2) + 6x(b - p) - 6bp = -\frac{5p^2}{3}.$

25. $x(3x - 8) + 3a(a - 2x) = 28 - 8a.$

26. $5(x + a - 1)^2 - 10x = 10a + 30.$

27. $2(x + 7) + 4a = 13\sqrt{x + 2a}.$

28. $3ax + 12a^2\sqrt{x} = 15a^3.$

29. $b(4x^2 + a^2) - 4x(ab - 3) = 6a + \frac{4a^2 - 12a}{b}.$

30. $7a^3\sqrt{x + \frac{b^2}{9} + 5a^4} + 3ax = a\left(\frac{b^2 - 7a^2b}{3}\right) - \frac{ab^2}{3}$
$- 15a^5.$

31. $3ab - 8b^2\sqrt{a - \frac{c}{x}} = \frac{3bc}{x} + 3b^3.$

32. $3\sqrt{x-2a^2} - \dfrac{5a^2}{3\sqrt{x-2a^2}} = 4a.$

33. $2x\sqrt[3]{x} - 3x\sqrt[3]{\dfrac{1}{x}} = 20.$

---

34. $(x-a)(x-b)(x-c) = 0.$

35. $(x+a^2)(x-a^3)\left(x+\dfrac{a}{3}\right) = 0.$

36. $(x+a)(x-a) = 4 - a^2.$

37. $(x-a)(x-b) = ab - a - b + 1.$

38. $\dfrac{\sqrt{x+2a} - \sqrt{x-2a}}{\sqrt{x-2a} + \sqrt{x+2a}} = \dfrac{x}{2a}.$

39. $\dfrac{a-x}{\sqrt{a-x}} + \dfrac{x-b}{\sqrt{x-b}} = \sqrt{a-b}.$

40. $\dfrac{(p-x)\sqrt{p-x} + (x-2m)\sqrt{x-2m}}{\sqrt{p-x} + \sqrt{x-2m}} = p - 2m.$

41. $\sqrt{\dfrac{a-x}{b+x}} + \sqrt{\dfrac{b+x}{a-x}} = c.$ **42.** $x - 3 = \dfrac{2}{\sqrt{x}}.$

43. $\sqrt{\dfrac{a-x}{b+x}} - \sqrt{\dfrac{b+x}{a-x}} = c.$ **44.** $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{48}{x^2} = 10\left(\dfrac{x}{3} - \dfrac{4}{x}\right).$

45. $\sqrt{\dfrac{a-x}{b-x}} + \sqrt{\dfrac{b-x}{a-x}} = c.$

46. $\sqrt{\dfrac{a-x}{b-x}} - \sqrt{\dfrac{b-x}{a-x}} = c.$

47. $\dfrac{x^2}{8a} + \dfrac{2x}{3} = \sqrt{\dfrac{x^3}{3a} + \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{a}{2}}.$

48. $\dfrac{x}{2m} + \dfrac{b}{x^2} - \dfrac{c^2}{x} = 1 + \dfrac{b}{4m^2} - \dfrac{c^2}{2m}.$

50. $\left(\dfrac{x+6}{x-6}\right)\left(\dfrac{x-4}{x+4}\right)^2 + \left(\dfrac{x-6}{x+6}\right)\left(\dfrac{x+9}{x-9}\right)^2 = 2.\ \dfrac{x^2+36}{x^2-36}.$

III. ÉQUATIONS DE DEGRÉS SUPÉRIEURS QUI SE RAMÈNENT AU SECOND DEGRÉ.

XLIV

1. Équations bicarrées et trinomes [1].

1. $x^4 + 4x^2 = 5.$ **2.** $x^4 - 8x^2 = 9.$ **3.** $x^4 + 5x^2 = \frac{11}{4}.$

4. $x^4 - \frac{7x^2}{3} = -\frac{2}{3}.$ **5.** $2x^4 - 9x^2 = \frac{19}{8}.$ **6.** $3x^4 - 14x^2 = 5.$

7. $x^6 + 4x^3 = 96.$ **8.** $x^{10} - 12x^5 = 56133.$

9. $x^{2m} + 2ax^m = 8a^2.$ **10.** $9x^{-4} + 4x^{-2} = 5.$

11. $ax^{-4} - 2bx^{-2} = \frac{3b^2}{a}.$ **12.** $x^2 - 4\sqrt{x^2 - 2} = -1.$

13. $x^{\frac{10}{3}} - 16x^{\frac{5}{3}} = 512.$ **14.** $(x^2 - 2)^{\frac{2}{3}} - 4(x^2 - 2)^{\frac{1}{3}} = 5.$

15. $x^2 = 8\sqrt{x^2 - 6} + 26.$ **16.** $x^2 + \sqrt{5x + x^2} = 42 - 5x.$

17. $x^2 - 9x - 9\sqrt{x^2 - 9x - 11} = -9.$

18. $2\sqrt{x^2 - 2x + 1} + x^2 = 23 + 2x.$

19. $2x^2 + 3x - 5\sqrt{2x^2 + 3x + 9} + 3 = 0.$

20. $\frac{3}{x + \sqrt{5 - x^2}} - \frac{3}{x - \sqrt{5 - x^2}} = 4.$

21. $\frac{6x^2 + 1}{\sqrt{2x^2 + 7}} + 5\sqrt{2x^2 + 7} = 12x.$

(1) *Bhascara* savait abaisser une équation du quatrième degré au second. Voici un exemple qu'il en donne dans le *Bija-Ganita*. Soit

$$x^4 - 2x^2 - 400x = 9999.$$

Si, dit-il, on ajoute de part et d'autre $400x + 1$, le premier membre seul sera un carré parfait; mais si on ajoute $4x^2 + 400x + 1$, les deux membres deviennent des carrés. En extrayant la racine, on ramène l'équation donnée à celle-ci: $x^2 - 2x = 99$. Ajoutant 1 à chaque membre, et prenant les racines, on trouve : $x - 1 = 10$, d'où $x = 11$. On ne trouve rien qui approche de cette simplicité et de cette clarté ni chez les Grecs ni chez les Arabes de la même époque.

22. $\dfrac{\sqrt{x^2+x+6}}{3} = \dfrac{20-\frac{4}{3}\sqrt{x^2+x+6}}{\sqrt{x^2+x+6}}$.

23. $x^{\frac{1}{3}}\sqrt[5]{x^3} - 6280x^{\frac{1}{5}}\sqrt[15]{x^4} = 1843641$.

24. $5m\sqrt{x^2-\dfrac{2(a+m)^2x}{5m}} + \dfrac{\frac{1}{5}(m^2-a^2)^2m^{-1}}{\sqrt{x^2-\dfrac{2(a+m)^2x}{5m}}}$

$= 2(a^2+m^2)$.

25. $\sqrt[m]{(1+x)^2} - \sqrt[m]{(1-x)^2} = \sqrt[m]{1-x^2}$.

26. $\dfrac{x^2}{x^2-a^2} + \dfrac{x^2}{x^2-b^2} = -4$.

27. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-a} + \dfrac{1}{x+a} + \dfrac{1}{x-b} + \dfrac{1}{x+b} = 0$.

28. $3x^n\sqrt[3]{x^n} + \dfrac{2x^n}{\sqrt[3]{x^n}} = 16$. 29. $\sqrt{2x} - 7x = -52$.

30. $x^2 - 7x + \sqrt{x^2-7x+18} = 24$.

31. $5^x + \dfrac{125}{5^x} = 30$. 32. $3^{2x} - \dfrac{531441}{3^{2x}} = 6480$.

---

33. $ax^{11} + bx^9 + cx^7 = 0$. 34. $2x^{\frac{1}{3}} - 3x^{\frac{2}{3}} + x = 0$.

35. $x^{\frac{3}{2}} + 8x^{\frac{1}{2}} - 9x = 0$. 36. $x^{\frac{5}{12}} + x^{\frac{2}{3}} = 20x^{\frac{1}{6}}$.

37. $\sqrt{x^7} + 8\sqrt{x} = 9x^2$. 38. $x^3 + 4x^{\frac{1}{3}} = 16\frac{1}{4}x\sqrt[3]{x^2}$.

39. $2x^5 - 6x^3 - x^4 = 0$. 40. $9x^5 + x^9 = 10x^7$.

41. $2x^{10} = 3x^6 - x^8$. 42. $x^3 - 3x = 2$.

43. $x^3 - 2x = 4$. 44. $x^3 - 4x^2 + 6x = 24$.

45. $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$. 46. $x^3 - 6x^2 + 9x = 4$.

47. $(x^2-5)^2 = (x-3)^2 + (x+1)^2$. 48. $2x^3 - x^2 = 1$.

49. $\dfrac{1}{3}\sqrt{x^2 + \dfrac{x}{2} + 8\frac{1}{2}} = \dfrac{63-2x^2-x}{4}$.

50. $\sqrt{x-\dfrac{1}{x}} + \sqrt{1-\dfrac{1}{x}} = x$.

---

51. $2x\sqrt{x^2 - 14{,}76} - \sqrt{x}\sqrt[4]{x^2 - 14{,}76} = 28.$

52. $2x - \sqrt{x^3} = -3\sqrt{x}.$ **53.** $\sqrt[3]{x} - 5\sqrt[3]{x^2} = -18.$

54. $7\sqrt[3]{-x} + \sqrt[3]{x^2} = -12.$

55. $\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\sqrt[4]{\frac{1-x}{1+x}} + \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{4}} = 2\left(\frac{1-a^2}{(1+a)^2}\right)^{\frac{1}{4}}.$

56. $\sqrt[3]{3a+x} + \sqrt[3]{3a-x} = \sqrt[3]{9a}.$

57. $\sqrt[3]{(a+x)^2} - \sqrt[3]{a^2 - x^2} + \sqrt[3]{(a-x)^2} = \sqrt[3]{a}.$

58. $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0.$

59. $32x^4 - 48x^3 - 10x^2 + 21x + 5 = 0.$

60. $(\sqrt[4]{x+a} + \sqrt[4]{x-a})^3(\sqrt[4]{x+a} - \sqrt[4]{x-a}) = 2c.$

XLV

2. Équations réciproques et autres.

Les équations *réciproques* ou *symétriques* sont celles qui ne changent pas quand on y remplace x par $\frac{1}{x}$. — Quand tous les termes, ordonnés par rapport aux puissances décroissantes de l'inconnue, sont ramenés dans le premier membre, les coefficients à égales distances des deux extrémités sont égaux. Ainsi :

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$$
$$ax^4 - bx^3 + cx^2 - bx + a = 0$$

sont des équations réciproques ou symétriques du quatrième degré.

Certaines équations qui s'écartent de ce type peuvent, par des transformations, être rendues symétriques ou abaissées par d'autres moyens au second degré. Ce sont :

1° L'équation du troisième degré $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, pourvu qu'on ait $c = \frac{b^3}{a^3}$. On la rend symétrique en faisant $x = \frac{b}{a}y$ et en substituant.

2° L'équation réciproque du quatrième degré dans laquelle manque le terme en x^2, et qui peut avoir deux formes :

$$\text{(I)} \quad ax^4 - bx^3 + bx - a = 0$$
$$\text{(II)} \quad ax^4 - bx^3 - bx + a = 0.$$

Le premier membre de (I) se ramène à un produit et peut s'écrire $(x^2 - 1)(ax^2 + bx + a) = 0$.

L'équation (II) se résout par les procédés ordinaires employés pour la résolution des équations réciproques.

3° Quand, dans l'équation du quatrième degré,

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0,$$

on a $d = \dfrac{(4ac - b^2)b}{8a^2}$, l'équation peut être abaissée au second degré par des transformations convenables.

4° Quand, dans l'équation générale du cinquième degré,

$$x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

on a les relations $d = \dfrac{ac^3}{b^3}$; $e = \dfrac{c^5}{b^5}$, on peut la transformer en une équation réciproque en faisant $x = \dfrac{c}{b}y$, et en substituant.

I. Remarque. — Si r est racine d'une équation symétrique, la quantité réciproque $\dfrac{1}{r}$ est aussi racine de l'équation.

II. Remarque. — Toute équation réciproque de degré pair

$$ax^{2m} + bx^{2m-1} + cx^{2m-2} + \dots\dots \quad + cx^2 + bx + a = 0$$

peut être ramenée à une autre équation réciproque d'un ordre moitié moindre

$$\alpha y^m + \beta y^{m-1} + \gamma y^{m-2} + \dots\dots \quad + \gamma y^2 + \beta y + \alpha = 0$$

en divisant par x^m et en faisant $x + \dfrac{1}{x} = y$.

III. Remarque. — Les équations réciproques de degré impair sont divisibles :

1° Par $x + 1$, quand les signes à égales distances des extrémités sont les mêmes ;

2° Par $x - 1$, quand les signes à égales distances sont contraires.

IV. Remarque. — Les équations réciproques de degré pair dont le dernier terme est -1, sont divisibles par $x^2 - 1$.

V. REMARQUE. — Si deux ou plusieurs équations ont des racines communes, elles ont aussi un facteur commun. Si on l'élimine, le facteur restant égalé à zéro donnera dans chaque équation une partie des racines ; le facteur commun donnera les autres.

---

1. $x^3 + x^2 + x + 1 = 0.$ **2.** $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0.$
3. $2x^3 + 7x^2 + 7x + 2 = 0.$ **4.** $3x^3 + 13x^2 + 13x + 3 = 0.$
5. $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0.$ **6.** $x^3 + x^2 - x - 1 = 0.$
7. $5x^3 + 2x^2 - 2x - 5 = 0.$
8. $12x^3 + 13x^2 - 13x - 12 = 0.$
9. $4x^3 + 13x^2 - 13x - 4 = 0.$
10. $x^3 + 3x^2 - 3x - 1 = 0.$ **11.** $ax^3 + bx^2 - bx - a = 0.$
12. $2x^3 - 3x^2 + 3x - 2 = 0.$ **13.** $5x^3 - 11x^2 + 11x - 5 = 0.$
14. $ax^3 - bx^2 + bx - a = 0.$
15. $-3x^3 - 7x^2 + 7x + 3 = 0.$

---

16. $x^3 + 4x^2 + 8x + 8 = 0.$ **17.** $x^3 - 6x^2 - 30x + 125 = 0.$
18. $x^3 + 2x^2 - 4x - 8 = 0.$ **19.** $x^3 - 5x^2 + 15x - 27 = 0.$
20. $2x^{-3} - 7x^{-2} + 7x^{-1} - 2 = 0.$
21. $35x^{-3} - 39x^{-2} - 39x^{-1} + 35 = 0.$
22. $12x^{-3} + 13x^{-2} - 13x^{-1} - 12 = 0.$
23. $6x^{\frac{3}{5}} - 19x^{\frac{2}{5}} + 19x^{\frac{1}{5}} - 6 = 0.$
24. $10x^{\frac{3}{4}} - 19x^{\frac{1}{2}} - 19x^{\frac{1}{4}} + 10 = 0.$
25. $x^{-\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{3}} - x^{-\frac{1}{6}} + 1 = 0.$

---

26. $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 1 - \frac{1}{x^2}.$ **27.** $m^3 = (m - x)^3 + x^3.$

28. $\frac{a - x}{a + x} = \sqrt{\frac{b - x}{b + x}}.$ **29.** $\frac{a - x^2}{a + x^2} = \sqrt{\frac{b - x^2}{b + x^2}}.$

30. $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0.$ **31.** $2x^3 - 2x^2 - 3x + 3 = 0.$

32. $x^3 + 5x^2 + 2x - 8 = 0.$ **33.** $x^3 - 4x^2 - 53x + 168 = 0.$

34. $x^3 - \frac{3x^2}{2} - 19\frac{1}{2}x + 10 = 0.$

---

35. $x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0.$
36. $x^4 + 2x^3 - 9\frac{1}{4}x^2 + 2x + 1 = 0.$
37. $x^4 + 8x^3 - 35\frac{7}{9}x^2 + 8x + 1 = 0.$
38. $x^4 - 7\frac{3}{4}x^3 + 16\frac{7}{8}x^2 - 7\frac{3}{4}x + 1 = 0.$
39. $x^4 - 5\frac{5}{6}x^3 + 10\frac{1}{3}x^2 - 5\frac{5}{6}x + 1 = 0.$
40. $x^4 - 8x^3 + 15\frac{3}{4}x^2 - 8x + 1 = 0.$
41. $x^4 - 6x^3 + 9\frac{7}{16}x^2 - 6x + 1 = 0.$
42. $6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6 = 0.$
43. $ax^4 - bx^3 + bx - a = 0.$
44. $6x^4 - 13x^3 + 13x - 6 = 0.$
45. $2x^4 - 5x^3 + 5x - 2 = 0.$ **46.** $3x^4 - 10x^3 + 10x - 3 = 0.$
47. $x^4 - 2x^3 + 2x - 1 = 0.$ **48.** $5x^4 - 6x^3 + 6x - 5 = 0.$
49. $ax^4 - bx^3 - bx + a = 0.$ **50.** $3x^4 - 17x^3 - 17x + 3 = 0.$
51. $2x^4 - 7x^3 - 7x + 2 = 0.$ **52.** $3x^4 - 7x^3 - 7x + 3 = 0.$
53. $4x^4 - 31x^3 - 31x + 4 = 0.$
54. $5x^4 - 23x^3 - 23x + 5 = 0.$

---

55. $4x^4 + 6x^3 + 3x^2 + \frac{9}{16}x - 14\frac{1}{2} = 0.$

56. $3x^4 + 8x^3 + 10x^2 + 6\frac{2}{9}x + \frac{8}{9} = 0.$

57. $7x^4 + 8x^3 + 3x^2 + \frac{20}{49}x - \frac{1911}{1372} = 0.$

58. $5x^4 + 6x^3 + 8x^2 + \frac{93}{25}x + \frac{6}{5} = 0.$

59. $2x^4 + 10x^3 + 20x^2 + \frac{75}{4}x - 12\frac{1}{2} = 0.$

60. $5x^4 + 4x^3 + 6x^2 + \frac{52}{25}x = 0.$

61. $2x^4 + 8x^3 + 15x^2 + 14x = 0.$
62. $3x^4 + 6x^3 + 20x^2 + 17x = 0.$

63. $x^4 - 8x^3 + 10x^2 + 24x + 5 = 0.$

64. $x^4 + x^3 - 15x^2 - 29x - 6 = 0.$

65. $x^4 - 8x^3 - 10x^2 + 104x + 105 = 0.$

66. $2x^4 - x^3 - 38x^2 + 79x - 30 = 0.$

67. $8x^4 + 4x^3 - 18x^2 + 11x - 2 = 0.$

68. $x^4 + 14x^3 + 53x^2 + 28x - 21 = 0.$

69. $x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x - 165 = 0.$

70. $x^4 - 6x^3 + 17x^2 - 24x - 33 = 0.$

71. $x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 12x - 96 = 0.$

Trouver les racines des équations binomes suivantes :

72. $x^2 - 1 = 0.$ **73.** $x^2 + 1 = 0.$ **74.** $x^3 - 1 = 0.$

75. $x^3 + 1 = 0.$ **76.** $x^4 - 1 = 0.$ **77.** $x^4 + 1 = 0.$

78. $x^5 + 1 = 0.$ **79.** $x^5 - 1 = 0.$ **80.** $x^6 - 1 = 0.$

81. $x^6 + 1 = 0.$

---

82. $x^5 + ax^4 + bx^3 + bx^2 + ax + 1 = 0.$

83. $x^5 + 3x^4 + 2\frac{3}{4}x^3 + 2\frac{3}{4}x^2 + 3x + 1 = 0.$

84. $x^5 - 2x^4 + x^3 + x^2 - 2x + 1 = 0.$

85. $x^5 - 5\frac{3}{4}x^4 + 5\frac{7}{8}x^3 + 5\frac{7}{8}x^2 - 5\frac{3}{4}x + 1 = 0.$

86. $6x^5 - 41x^4 + 97x^3 - 97x^2 + 41x - 6 = 0.$

87. $15x^5 + 34x^4 + 15x^3 - 15x^2 - 34x - 15 = 0.$

88. $12x^5 - 56x^4 + 107x^3 - 107x^2 + 56x - 12 = 0.$

89. $10x^5 - 50\frac{1}{3}x^4 + 41x^3 + 41x^2 - 50\frac{1}{3}x + 10 = 0.$

90. $x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 16x + 32 = 0.$

91. $x^5 + 5x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 40x + 32 = 0.$

92. $x^5 + 3x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 24x - 32 = 0.$

93. $15x^6 - 128x^5 + 305x^4 - 256x^3 + 305x^2 - 128x + 15 = 0.$

94. $x^6 + 8x^5 - 8x^4 + 8x^2 - 8x - 1 = 0.$

95. $6x^7 - 41x^6 + 103x^5 - 138x^4 + 138x^3 - 103x^2 + 41x - 6 = 0.$

96. $90x^7 - 309x^6 + 133x^5 + 532x^4 - 532x^3 - 133x^2 + 309x - 90 = 0.$

97. $4410x^7 - 16737x^6 + 16849x^5 - 4298x^4 - 4298x^3 + 16849x^2 - 16737x + 4410 = 0.$

Résoudre les équations :

98. $x^3 - 66x^2 + 1256x - 6336 = 0$, sachant que 8 est racine.

99. $x^3 + 26x^2 - 292x - 680 = 0$, sachant que 10 est racine.

100. $x^3 - 3x^2 - 11x + 5 = 0$, sachant que 5 est racine.

101. $x^8 - 10x^7 + 32x^6 - 21x^5 - 63x^4 + 74x^3 + 32x^2 - 35x + 6 = 0$; 2 et 3 sont racines.

102. $x^8 - 5x^7 - 18x^6 + 62x^5 + 154x^4 - 40x^3 - 147x^2 - 17x + 10 = 0$; -2 et 5 sont racines.

Les équations de chacun des cinq groupes suivants ont des racines communes ; résoudre ces équations.

103. $\begin{cases} x^3 - 15x^2 + 71x - 105 = 0. \\ x^3 - 39x - 70 = 0. \end{cases}$

104. $\begin{cases} x^4 - 5x^3 - 16x^2 + 68x - 48 = 0. \\ x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12 = 0. \end{cases}$

105. $\begin{cases} x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 6x - 8 = 0. \\ x^4 + x^3 - 9x^2 + 10x - 8 = 0. \end{cases}$

106. $\begin{cases} x^4 + 3x^3 - 56x^2 + 132x - 80 = 0. \\ 2x^5 + 13x^4 - 67x^3 + 38x^2 + 76x - 40 = 0. \end{cases}$

107. $\begin{cases} 2x^4 - 19x^3 + 27x^2 + 76x - 140 = 0. \\ 8x^5 - 40x^4 + 54x^3 + 6x^2 - 56x + 40 = 0. \\ 2x^6 - 15x^5 + 33x^4 - 18x^3 + 9x^2 - 39x + 10 = 0. \end{cases}$

108. Dans l'équation $x^4 - 7x^3 + 11x^2 - 7x + 10 = 0$, deux des racines sont dans le rapport de a à $2a + 1$; résoudre l'équation.

109. Résoudre $2x^4 - 19x^3 + 12x^2 + 151x + 70 = 0$, sachant que deux racines a et b sont liées par la relation $b = 2a - 3$.

110. L'équation $x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 48x - 64 = 0$ a deux racines égales et de signes contraires ; trouver ces racines.

---

111. $\dfrac{\sqrt[3]{a-x}-\sqrt[3]{x-b}}{\sqrt[3]{a-x}+\sqrt[3]{x-b}}=\dfrac{a+b-2x}{a-b}.$

112. $\sqrt[3]{a-x}+\sqrt[3]{x-b}=\dfrac{3}{7}\cdot\dfrac{a-b}{\sqrt[3]{(a-x)(x-b)}}.$

113. $\sqrt[5]{a+x}+\sqrt[5]{a-x}=\sqrt[5]{2a}.$

114. $\sqrt[6]{m-y}+\sqrt[6]{m+y}=\sqrt[6]{2m}.$

115. $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x+19}=\sqrt[3]{10x+45}.$

116. $\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{4x-5}-\sqrt[3]{x-7}.$

117. $\sqrt[3]{4x-5}-\sqrt[3]{16x-3}=-\sqrt[3]{x}.$

Les trois dernières équations admettent 8 comme racine.

XLVI

IV. PROBLÈMES DONNANT DES ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ A UNE INCONNUE.

1. Trouver un nombre dont le quart et le septième multipliés ensemble donnent pour produit 112.

2. Quel est le nombre qui, multiplié par ses trois cinquièmes, donne 1215 pour produit?

3. Un nombre est tel que, si l'on multiplie ses $^3/_7$ par ses $^5/_6$ et qu'on divise le produit par 4, on obtient 630 pour quotient. Trouver ce nombre.

4. La différence de deux nombres est 8 et leur produit 308. Trouver ces nombres.

5. Si je multiplie ensemble $\frac{1}{80}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{16}$ d'un certain nombre, le produit que j'obtiens vaut 16 fois ce nombre. Quel est-il?

6. Deux nombres sont tels que leur produit est 288 et le quotient du premier divisé par le second 8. Quels sont ces nombres?

7. Deux nombres sont dans le rapport de 4 à 7, et la somme de leurs carrés est 585. Quels sont ces nombres?

8. Le produit de deux nombres est 153, et l'un dépasse 13 d'autant d'unités que 13 dépasse le plus petit des deux nombres. Trouver ces derniers.

9. Deux nombres sont dans le rapport de 1/3 à 1/5 et la somme de leurs carrés est 1666. Quels sont ces nombres?

10. La somme des carrés de trois nombres entiers consécutifs est 1202. Quels sont ces nombres?

11. La somme des carrés de trois nombres pairs consécutifs est 776. Quels sont ces nombres?

12. Trois multiples entiers de 4 qui se suivent ont pour somme de leurs carrés 3104. Trouver ces nombres.

13. A la place d'un jardin de forme carrée que j'avais acheté, mon vendeur m'offre un terrain rectangulaire de même contour, mais dont la longueur est de 16^{m} plus grande que celle du carré et dont la superficie n'en est que les $^{224}/_{225}$. Combien lui devrai-je pour ce dernier terrain, à 4 fr. le mètre carré?

14. Trois nombres sont entre eux dans le même rapport que les fractions 2/3, 3/4, 4/5 ; la somme de leurs carrés est 148 225. Quels sont ces nombres?

15. Trouver un nombre dont le tiers, la demi, le quart et le sixième multipliés ensemble font 9 437 184.

16. Trouver trois nombres tels que, écrits à la suite les uns des autres, chacun d'eux surpasse le précédent de 5, et dont le produit égale 8 fois la somme?

17. La somme des carrés de deux nombres est 5690 et la différence de ces mêmes carrés est 1272. Quels sont ces nombres?

18. Un espace gazonné circulaire a une superficie de 1017,8784 mètres carrés. On voudrait, sans en changer la superficie, donner à ce gazon la forme d'un anneau compris entre deux circonférences concentriques dont le rayon de l'une serait double du rayon de l'autre. Quels rayons faut-il donner à ces circonférences? On sait que le rapport de la circonférence au diamètre est 3,1416.

19. La longueur d'un champ rectangulaire est à sa largeur comme 16 est à 11. Le voisin, pour rendre plus régulière la forme des propriétés contiguës, propose de diminuer la largeur, mais d'augmenter la longueur, de manière que les nouvelles dimensions seraient dans le rapport de 17 à 10. Le champ restant rectangulaire perdrait ainsi 216 mètres carrés. Quelles sont ses dimensions?

20. Bordeaux, Angoulême et Montauban forment un triangle rectangle, dont le sommet de l'angle droit est à Bordeaux. La distance en ligne droite de Montauban à Angoulême est de 207 kilomètres. Les distances de Bordeaux à Angoulême et de Bordeaux à Montauban sont respectivement comme 10 à 17. A quelle distance en ligne droite est Bordeaux d'Angoulême et de Montauban?

21. Dunkerque, Bruxelles et Reims forment un triangle rectangle, dont le sommet de l'angle droit est à Bruxelles. La somme des carrés des trois côtés mesurés en kilomètres est 105 800. Les distances de Bruxelles à Dunkerque et de Bruxelles à Reims sont entre elles comme 56 à 73. Quelles distances séparent ces trois villes l'une de l'autre?

22. Deux voyageurs partent au même instant du même point et vont l'un au sud, l'autre vers l'est, parcourant, le premier 30 kilomètres, le second 40 kilomètres par jour. Au bout de combien de jours seront-ils à 250 kilomètres l'un de l'autre?

23. Du point d'intersection des diagonales d'un carré comme centre on décrit une circonférence passant par les milieux des segments des diagonales; l'espace compris entre cette circonférence et les côtés du carré se trouve alors être de 971,68 centimètres carrés. Quel est le côté du carré? On prendra $\pi = 3{,}1416$.

24. On a acheté un certain nombre de kilogrammes de café, 4 fois autant de thé et 6 fois autant de laine. Pour le kilogramme de chaque marchandise, on paye autant de francs qu'on a pris de kilogrammes de cette marchandise, et en tout on a dépensé 477 fr. Combien a-t-on acheté de café?

25. Un voyageur part de *A* et se dirige vers le nord, en parcourant chaque jour 36 kilomètres. Cinq jours après, un second voyageur part aussi de *A* se dirigeant vers l'est, et faisant chaque jour 28 kilomètres. Au bout de combien de jours ce second voyageur se trouvera-t-il éloigné, en ligne directe, de 430 kilom. du premier?

---

26. En admettant que la gravité à 45° soit 9,806, combien de temps mettrait un corps à tomber librement d'une hauteur de 4810^m (Mont-Blanc) jusqu'au niveau de la mer?

27. La gravité étant à l'équateur de 9,781, et la distance moyenne de la lune à la terre étant de 96 000 lieues de 4 kilomètres, on demande combien de temps mettrait un corps à tomber de la lune sur un point de l'équateur, en supposant nulle l'attraction de notre satellite sur le mobile?

28. L'intensité de la lumière solaire à la surface de notre globe étant prise pour unité, on demande de déterminer, en ne tenant compte que des distances, quelle est l'intensité de la lumière à la surface de Vénus et quelle est la distance de Neptune au soleil. Les distances moyennes du soleil à Vénus et à la terre sont 26 900 000 lieues et 37 200 000 lieues; l'intensité de la lumière à la surface de Neptune est 0,00111.

29. A quelle distance la lumière d'un foyer lumineux, dont l'intensité à 2 kilomètres égale celle de 3000 becs Carcel, ne sera-t-elle plus que de 1 bec Carcel?

30. L'intensité de l'attraction exercée par les corps célestes étant proportionnelle aux masses et en raison inverse du carré des distances, on demande à quelle distance du centre de la terre est le point où l'attraction de la lune et celle de la terre sont égales; la masse de la lune étant 1, celle de la terre est 88; la distance du centre de notre satellite au centre de la terre est de 96 000 lieues kilométriques. (1)

---

31. La somme de deux nombres est 39 et la somme de leurs carrés est 801. Quels sont ces nombres?

32. La différence de deux nombres est 36 et la somme de leurs carrés est 2448. Quels sont ces nombres?

33. Divisez 28 en deux parties telles que leur produit ajouté à la somme de leurs carrés donne 652.

34. Quel est le nombre dont le triple ajouté au double de sa racine carrée donne 161?

35. Quel est le nombre qui surpasse sa racine carrée de 182?

36. Quel est le nombre dont le double diminué de 14 vaut 12 fois la racine carrée?

37. La somme des carrés de deux nombres entiers consécutifs est 2245. Quels sont ces nombres?

(1) A l'exception des numéros 25 et 30, les problèmes qui précèdent donnent des équations incomplètes.

38. La somme des carrés de trois nombres entiers consécutifs diminuée de la somme des carrés des deux nombres entiers précédents donne 288. Quels sont ces nombres?

39. Un certain nombre pair est tel que son carré augmenté de ceux des deux nombres pairs suivants surpasse de 406 la somme des carrés des deux nombres impairs qui le suivent. Quel est ce nombre?

40. Un certain nombre, multiple de 3 et de 4, est tel que la somme des carrés des deux multiples de 4 qui le suivent, diminuée de la somme des carrés des trois multiples de 3 qui le précèdent, donne 818 pour reste. Quel est ce nombre?

41. De deux nombres, le plus grand surpasse le plus petit de 48, et si l'on ajoute à leur somme le quotient du plus grand divisé par le plus petit, on obtient 99 pour résultat. Quels sont ces deux nombres?

42. Trouver 5 nombres entiers consécutifs tels que la somme des carrés des deux plus grands soit égale à la somme des carrés des trois autres.

43. Un nombre est le produit de trois nombres entiers consécutifs. Si on le divise par chacun de ses trois facteurs, la somme des quotients ainsi obtenue est 767. Quel est ce nombre?

44. Trouver deux nombres dont la somme soit double de la différence, et dont le produit, diminué du plus petit, soit égal à 720 fois le quotient du plus grand par le plus petit.

45. Trouver un nombre qui, ajouté avec son carré et son cube, donne une somme égale à 463 fois le nombre en question.

46. Quel est le nombre dont le carré et le cube ajoutés ensemble donnent une somme égale à 36 fois le nombre entier suivant?

47. Des amis dînant dans un hôtel firent une dépense totale de 102 fr. Comme on ne permit pas à trois invités de payer, les autres convives eurent à débourser $1\frac{2}{7}$ fr. de plus que si tous avaient payé leur part de la note. Combien y avait-il d'amis?

48. Une pièce d'eau circulaire de 864 mètres carrés de superficie doit être transformée en une autre de même étendue, mais de forme rectangulaire, dont la largeur aura 12 mètres de moins que la longueur. Quelles seront les deux dimensions?

49. La surface d'un champ rectangulaire est de 312,8 ares. Si l'on augmentait chacune des dimensions de 1^m, la surface serait

augmentée de 472 mètres carrés. Quelles sont les deux dimensions?

50. Si l'on donnait 5 oranges de plus pour 2 fr., la douzaine coûterait 40 cent. de moins. Combien coûte une orange?

51. Une femme achète un certain nombre d'œufs pour 1 fr. 80. Si, pour le même prix, on lui avait donné 4 œufs de plus, chacun d'eux lui aurait coûté $1\frac{1}{2}$ cent. de moins. Combien a-t-elle acheté d'œufs?

52. Un marchand achète des moutons qui lui coûtent en tout 672 fr. Si chaque mouton lui avait coûté 4 fr. de moins, il aurait pu, avec la même somme, en acheter 3 de plus. Combien en a-t-il acheté, et à quel prix?

53. Un marchand achète des moutons qui lui coûtent 672 fr. Si chaque mouton lui avait coûté 4 fr. de plus, avec la même somme, il en aurait eu 3 de moins. Combien a-t-il acheté de moutons?

54. Des singes s'amusaient : de la troupe bruyante
Un huitième au carré gambadait dans le bois.
Douze criaient tous à la fois
Au haut de la colline verdoyante.
Combien étaient-ils au total [1]?

55. Un pépiniériste achète 673 jeunes arbres, qu'il plante en rangées également espacées sur deux terrains formant des carrés dont le côté de l'un contient 6 arbres de plus que le côté de l'autre, après quoi il lui reste encore 7 arbres. Combien d'arbres contenait chaque carré?

56. Un père avait 24 ans à la naissance de son fils. Si l'on multiplie ensemble les âges qu'ont actuellement le père et le fils, on trouve un produit égal à 3 fois le carré de l'âge du fils. Quel est l'âge actuel de chacun d'eux?

57. Un touriste qui a fait un voyage de 630 kilomètres aurait employé 4 jours de moins s'il avait parcouru chaque jour 10 kilomètres de plus. Combien a-t-il mis de jours à son voyage, et quelle distance a-t-il franchie chaque jour?

1 Ce problème, ainsi que le 81, est dû à Bhâscara, auteur hindou du XIIe siècle. La traduction est de M. Léon Rodet. (*Journal asiatique*, janvier 1878.)

58. Un touriste qui a fait un voyage de 630 kilomètres aurait employé 4 jours de plus s'il avait parcouru chaque jour 10 kilomètres de moins. Combien a-t-il mis de jours à faire son voyage, et quelle distance a-t-il franchie chaque jour?

59. Un petit marchand a acheté un certain nombre d'oranges qui lui ont coûté 7 fr. 56. Après en avoir jeté 5 qui étaient gâtées, il vend chaque orange qui lui reste 4 cent. de plus qu'il ne l'avait payée, et réalise ainsi un gain de 58 cent. Combien avait-il acheté d'oranges?

60. On a distribué 840 noix entre des enfants. Si chacun de ceux-ci avait reçu 2 noix de moins, il en aurait eu autant qu'il y avait de participants à la distribution. Combien y avait-il d'enfants?

61. Je revends une montre 22 fr. 75, et je perds ainsi autant pour cent qu'elle m'avait coûté. Combien l'avais-je payée?

62. Dans un terrain de forme carrée, on veut planter des arbres, qui doivent dessiner aussi des carrés. Si l'on plante les arbres en rangées distantes de 4 mètres, il faudra 2952 arbres de plus qu'en espaçant les rangées de 5 mètres. Quel est le côté du carré?

63. On veut planter d'arbres, en rangées parallèles, un terrain rectangulaire dont la longueur est à la largeur comme 9 : 4. Si les rangées sont espacées de 5 mètres sur la largeur et de 6 mètres sur la longueur, il faudra 5 arbres de moins que si l'on place les rangées à 6 mètres de distance sur la largeur et 5 mètres sur la longueur. Quelles sont les dimensions du rectangle?

64. Le côté d'un carré est de 230 mètres. Trouver les dimensions d'un rectangle dont le périmètre a 12 mètres de plus que celui du carré, et la superficie 460 mètres carrés de moins.

65. Un miroir de 84 centimètres de haut et 60 centimètres de large doit être pourvu d'un cadre de largeur uniforme dont la surface soit égale à celle du miroir. Quelle sera la largeur du cadre?

66. Un champ carré contient un nombre de centiares égal au produit de 32 fois son périmètre, augmenté de 260. Quel est le côté de ce carré?

67. Il manque à un terrain carré, pour avoir une superficie de 260 centiares, un nombre de mètres carrés égal à 32 fois le périmètre du carré. Quel est le côté de celui-ci?

68. Une maman veut distribuer 144 noix entre ses 7 enfants, et charge un des garçons de faire la répartition. Celui-ci donne la moitié des noix aux garçons et la moitié aux filles. De cette manière, chaque fille reçoit 6 noix de plus qu'un garçon. Combien y avait-il de filles et combien de garçons ?

69. Un terrain rectangulaire de 7 mètres de large et de 9 mètres de long doit être planté au milieu d'une plate-bande dont la superficie soit les 5/21 du rectangle, et qui soit entourée d'un bord de gazon de même largeur partout. Quelles seront : 1° les dimensions de la plate-bande : 2° la largeur du gazon ?

70. Deux réservoirs de forme cubique contiennent ensemble 1853 litres. La somme des hauteurs de ces réservoirs est 1m,7. Quel est le côté de chacun d'eux?

71. Trois ouvriers, *A*, *B*, *C*, creuseraient une tranchée : A en 6 jours de plus, *B* en 30 jours de plus, et *C* dans le triple du temps qu'ils auraient mis s'ils avaient travaillé ensemble. Combien emploieront-ils de jours à la creuser s'ils travaillent simultanément ?

72. J'achète des oranges, dont chacune me coûte un nombre de centimes égal au tiers du nombre d'oranges achetées. Avec la même somme, j'aurais pu avoir deux fois autant de pommes plus 21, en payant par pomme 12 cent. de moins que le prix d'une orange. Combien ai-je acheté d'oranges?

73. J'achète des oranges, dont chacune coûte un nombre de centimes égal au tiers du nombre d'oranges achetées. Avec la même somme, j'aurais pu acheter deux fois autant de pommes moins 21, en les payant chacune 12 cent. de plus qu'une orange. Combien ai-je acheté d'oranges?

74. Une personne prête une somme de 4200 fr. en deux titres, à des taux différents, mais tels que les deux titres produisent la même rente annuelle. Le premier titre produirait 96 fr. s'il portait intérêt au taux du second, et celui-ci donnerait 54 fr. s'il portait intérêt au taux du premier. Quels sont les taux d'intérêt?

75. J'achète un certain nombre de mètres de soie, 6 fois plus de drap et 4 mètres de velours de moins que de drap. Le prix en francs d'un mètre de chaque étoffe est égal : pour la soie, à la moitié du nombre de mètres de soie; pour le drap, au huitième du nombre de mètres de drap, et pour le velours, au

quart du nombre de mètres de cette étoffe. En tout, j'ai dépensé 3396 fr. Combien ai-je acheté de mètres de soie ?

76. Mon voisin a prêté une somme de 18,000 fr. Au bout d'un an, il reçoit l'intérêt, dont il dépense 210 fr., puis ajoute le reste au capital et fait valoir le tout au même taux que précédemment, après quoi, au bout d'une nouvelle année, il se trouve posséder, en capital et intérêts, 19 437 fr. Quel était le taux du placement?

77. Le dénominateur d'une fraction surpasse de 3 le numérateur. Si l'on ajoute 2 à chaque terme, la fraction ainsi obtenue vaut $^2/_{21}$ de plus que la fraction primitive. Quelle est celle-ci ?

78. Un tonneau contient 80 litres de vin. On en tire un certain nombre de litres qu'on remplace par de l'eau. De ce mélange, on tire de nouveau le même nombre de litres que la première fois, et on les remplace par de l'eau, après quoi les 80 litres de liquide du tonneau ne renferment plus que 45 litres de vin. Combien a-t-on tiré de litres chaque fois?

79. Un détachement de soldats est disposé, sur 4 hommes de profondeur, en un carré vide au milieu. Si l'on ôtait 23 hommes, on pourrait disposer le reste en un carré plein tel que le nombre de soldats sur chaque côté serait égal aux $^4/_{11}$, moins un soldat, du nombre d'hommes qui formaient un côté du carré vide. Combien y a-t-il de soldats dans le détachement?

80. Deux tuyaux ont coulé, pendant des temps différents, dans un bassin de la contenance de 5280 litres, qu'ils ont rempli. Le premier fournit par seconde 2 litres de plus que le second. Si le débit de celui-ci avait été égal au débit du premier tuyau, il aurait fourni 3400 litres, tandis que le premier tuyau à lui seul aurait donné 2048 litres si son débit avait été le même que celui du second tuyau. Combien chacun donnait-il de litres par seconde?

81. D'un essaim de mouches à miel
Prends la moitié puis la racine :
Dans un champ de jasmins cette troupe butine.
Huit neuvièmes du tout voltigent dans le ciel.
Une abeille solitaire
Entend dans un lotus son mâle bourdonner :

Attiré par l'odeur, pendant la nuit dernière
Il s'était fait emprisonner.
De combien est l'essaim, le saurais-tu, ma chère? [1]

82. Trouver un nombre tel que son carré augmenté de son cube donne une somme égale à 9 fois le nombre entier suivant.

83. Deux courriers partant du même point sont envoyés au même moment à la ville Z, distante de 72 kilomètres. Le premier franchit par heure 1 kilomètre de plus que le second, et arrive aussi à destination 1 heure plus tôt. Quelle distance parcourt par heure chaque courrier?

84. Un train part de A pour B, distant de 216 kilomètres, à 2 heures du matin. A 5 1/2 heures du matin part de A, pour la même destination, un second train qui parcourt par heure 4 kilomètres de plus que le premier et qui arrive 1 heure avant celui-ci. A quelle heure chaque train est-il arrivé en B?

85. Quand une voiture a parcouru 54 mètres, il se trouve qu'une roue de devant a fait 9 révolutions de plus qu'une roue de derrière. Si l'on augmentait la circonférence de chaque roue de 3 décimètres, la roue de devant ne ferait plus, en parcourant le même espace, que 6 tours de plus qu'une des grandes roues. Quelle est la circonférence de chacune d'elles?

86. Une échelle dont le pied reste fixe atteint juste, d'un côté d'une rue, une fenêtre à 12 mètres du sol. Si on la fait pivoter autour de son pied pour l'appuyer contre les maisons de l'autre côté de la rue, elle y atteint une fenêtre à 9 mètres du sol. Les deux positions de l'échelle étant à angle droit l'une par rapport à l'autre, on demande quelle est la longueur de l'échelle et la largeur de la rue?

87. Un bassin peut être rempli en 26 1/4 h. par deux tuyaux coulant ensemble. Si on les faisait couler séparément, le plus grand mettrait 18 heures de moins que le petit à remplir le bassin. Combien chaque tuyau emploierait-il d'heures à remplir seul le réservoir?

88. Deux corps se meuvent sur deux droites qui se coupent à angle droit, et s'approchent tous les deux du point d'intersection.

1 Ce problème est tiré de la *Lilâvati*, traité d'arithmétique de Bhâscara, qui le dédia à une femme, à laquelle tous les énoncés de problèmes sont adressés.

L'un des mobiles en est à 236 mètres et parcourt 7 mètres par seconde; le second en est à 197 mètres, et parcourt 6 mètres par seconde. Au bout de combien de temps seront-ils éloignés l'un de l'autre de 13 mètres seulement?

89. Les centres de deux cercles se meuvent sur deux droites qui se coupent à angle droit, et ils se dirigent vers le point d'intersection. Le centre du premier cercle, dont le rayon est de 46 mètres, est éloigné de 2248 mètres du sommet de l'angle droit, et s'en rapproche de 7 mètres par seconde. Le second cercle a un rayon de 14 mètres; son centre est à 1628 mètres du sommet de l'angle droit, et s'en rapproche avec une vitesse de 5 mètres par seconde. Au bout de combien de temps les deux cercles seront-ils tangents extérieurement?

90. Quel résultat donnerait le problème précédent si, pour le premier cercle, le rayon était de 981 mètres, la distance de 2442 mètres, la vitesse de 7 mètres par seconde, et pour le second cercle le rayon de 980 mètres, la distance de 1591 mètres et la vitesse de 5 mètres?

91. Deux trains partent de deux villes, *M* et *N*, distantes de 560 kilomètres, et vont à la rencontre l'un de l'autre. Pour qu'ils se rencontrent à moitié chemin, il faut que le train de *N* parte 1 3/4 h. avant l'autre. Si les deux trains partent au même moment, au bout de 7 heures, la distance qui les séparera sera réduite à 1/10 de la distance primitive. Combien met chaque train pour aller de *M* en *N*?

---

92. Deux nombres sont dans le rapport de m à n; la somme de leurs carrés est s. Quels sont ces nombres?

93. Soient a, b, c les trois côtés d'un triangle et a le plus grand de tous. Déterminer la quantité x qu'il faut retrancher de chaque côté pour que le triangle dont les côtés seraient $a - x$; $b - x$; $c - x$, soit rectangle?

Appliquez le résultat au triangle dont les côtés sont 18, 16 et 9.

94. Divisez une droite a en deux segments tels que le double du carré fait sur l'un des segments soit égal au rectangle fait sur la ligne entière et le second segment.

Quelle est l'interprétation à donner à la solution négative?

95. Divisez une ligne a en deux segments tels que deux fois la somme des carrés faits sur les segments égale le carré fait sur la ligne entière.

96. Partager une droite de longueur a en deux segments, de manière que le plus long x soit moyenne proportionnelle géométrique entre la ligne entière et le plus petit segment.

Quelle est l'interprétation qu'il faut donner à la solution négative ?

97. Connaissant les longueurs $2a$ et $2b$ de deux cordes parallèles d'un même cercle, ainsi que leur distance c, trouver la distance x du centre à l'une d'elles, et le rayon r du cercle.

98. Connaissant les longueurs de deux cordes $AC = a$; $BC = b$, menées d'un point C donné sur une circonférence de diamètre d, trouver la longueur x de la corde AB qui unit leurs extrémités.

99. On donne deux côtés a et b, ainsi que l'aire Q d'un triangle ; trouver le troisième côté x.

Dans quel cas le problème devient-il impossible ?

100. Soient dans le problème ci-dessus $a = 1845^{m}$; $b = 1386^{m}$; $Q = 823\ 284$ m. carrés. Trouver x.

101. Connaissant deux côtés a et b d'un triangle et la médiane m aboutissant au milieu du troisième côté c, trouver ce dernier et l'aire Q du triangle.

102. Connaissant les trois côtés a, b, c d'un triangle ABC [1], et un point D sur le côté c, déterminer la longueur x de la ligne qui joint D au sommet de l'angle opposé C.

103. Soient dans le problème ci-dessus $a = 42^{m}$; $b = 53^{m}$; $c = 70^{m}$ et le segment $AD = 50^{m}$; trouver x.

104. Deux corps de masses m et m' sont placés, le premier au point A, le second au point B. Trouver sur une droite XY qui ne passe pas par A et B, un point D qui soit également attiré par les deux corps. On donne la projection a de la distance AB sur la droite XY, et les distances α et β des points A et B à la même droite.

Quelle interprétation faut-il donner à la solution négative ?

[1] On a l'habitude de désigner par a le côté opposé à l'angle A et ainsi de suite.

105. La hauteur d'un cône est égale au diamètre d'une sphère. Quel doit être le rayon x de la base du cône pour que le volume de ce dernier soit égal au volume de la sphère ?

106. On laisse tomber librement une pierre à l'ouverture d'un puits, et il s'écoule s secondes depuis le moment où l'on a lâché la pierre jusqu'à celui où le bruit de sa chute arrive à l'oreille. On demande quelle est la profondeur du puits, en supposant que la chute ait lieu comme dans le vide.

Discuter le résultat et examiner si les deux solutions conviennent ou si l'une doit être rejetée et pourquoi. (Voir remarque c page 124).

107. Soient dans le problème précédent $s = 4$ secondes ; $g = 9,8088$ et la vitesse du son 333^m par seconde. Trouver la profondeur du puits.

V. ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ A PLUSIEURS INCONNUES

XLVII

1. Equations numériques.

1. $x^2 + y^2 = 661$, $x^2 - y^2 = 589.$

2. $y^2 - z^2 = -80$, $z^2 + y^2 = 82.$

3. $3x^2 - y^2 = 59$, $2x^2 + 3y^2 = 98.$

4. $\frac{x^2}{2} + 3y^2 = 140$, $5x^2 - \frac{y^2}{3} = 308.$

5. $x + y = 12$, $xy = 35.$

6. $y - z = 8$, $yz = 240.$

7. $x + y = \frac{7}{6}$, $xy = \frac{1}{3}.$

8. $x + y = 1$, $xy = -1.$

9. $x^2 + y^2 = 74$, $x + y = 12.$

10. $\frac{x+y}{x-y} = 12$, $x^2 - y^2 = 48.$

11. $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{36}$, $xy^2 - x^2y = 324.$

12. $5x^2 + 2y^2 = 373$, $2x + 5y = 54.$

13. $16x^2 = 9y^2$, $2xy - 5x + 6y = 33.$

14. $x + y - \sqrt{x} + \sqrt{y} - 2\sqrt{xy} = 2$, $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 8.$

15. $60 - 16xy = -x^2y^2$
$x + y = 7.$

16. $y^2 + z^2 = 130$
$y + z = 14.$

17. $x^2 + z^2 = \frac{241}{400}$
$x + z = \frac{19}{20}.$

18. $x^2 + y^2 = 10$
$x - y = 2.$

19. $x^2 + y^2 = 250$
$x - y = 22.$

20. $x^2 - y^2 = 120$
$x + y = 20.$

21. $x^2 - y^2 = -\frac{1}{4}$
$x + y = \frac{3}{2}.$

22. $x^2 + xy = 260$
$xy + y^2 = 140.$

23. $x^2 + y^2 = 218$
$xy - y^2 = 42.$

24. $2x - 5y = -18$
$3xy = 264.$

25. $5x + 2y = 29$
$5xy = -105.$

26. $xy = 80$
$\frac{x}{y} = 5.$

27. $x = \frac{7}{3}\sqrt{x + y}$
$y = \frac{11}{3}\sqrt{x + y}.$

28. $x = 6\sqrt{x + y}$
$y = 2\sqrt{x + y}.$

29. $\frac{9}{x^2} - 2y^2 = -1$
$\frac{2}{x^2} + 9y^2 = \frac{83}{9}.$

30. $4x^2 - 3y^2 = -83$
$3x + 2y = 26.$

31. $5x^2 - 4y^2 = 109$
$7x - 5y = 25.$

32. $3x^2 - y^2 = 83$
$x + y = 15.$

33. $x + xy + y = 47$
$x + y = 12.$

34. $x^2 + xy + y^2 = 217$
$x + y = 17.$

35. $x + y = 23$
$x + xy = 144.$

36. $xy + x = 20$
$xy - y = 12.$

37. $xy + x = 104$
$xy - y = 84.$

38. $2x + 3y = 20$
$3xy - y^2 = 38.$

39. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{9}{20}$
$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{41}{400}.$

40. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$
$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{5}{36}.$

41. $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{7}{60}$
$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{169}{3600}.$

42. $x^2 + xy + y^2 = 79$
$x^2 - xy + y^2 = 37.$

43. $xy - x^2 - y^2 = -91$
$x^2 + y^2 + xy = 223.$

44. $42(x^2 + y^2) = 85xy$
$15xy = 2520.$

45. $x^2 + y^2 + xy = 67$
$x + y = 9.$

46. $x^2 + y^2 - xy = 14\frac{1}{4}$
$x + y = 4\frac{1}{2}.$

47. $x^2 + y^2 + xy = 54\frac{1}{9}$
$x - y = 6\frac{1}{3}.$

48. $x^2 + y^2 - xy = 84$
$x - y = 2.$

49. $x + y + x^2 + y^2 = 162$
$x - y + x^2 - y^2 = -102.$

50. $x + y + x^2 + y^2 = 1\frac{5}{8}$
$y - x + y^2 - x^2 = -1.$

51. $x^2 + y^2 + x + y = 18$
$2xy = 12.$

52. $x^2 + y^2 - x + y = 32$
$2xy = 30.$

53. $x^2 + 2xy + 3y = 830 - x$
$x - y + y^2 = 394.$

54. $x^2 - x + 138 = 2xy + 3y$
$y^2 + 7y - 3x = 278.$

55. $x^2 + y^2 + x + y = 168$
$\sqrt{xy} = 6.$

56. $x^2 + y^2 - x + y = 2400$
$\sqrt{xy} = 30.$

57. $9x^2 + y^2 + 3x + y = 3042$
$\sqrt{16xy} = 48.$

58. $x^3 + y^3 = 65$
$x + y = 5.$

59. $x^3 - y^3 = 1304$
$x - y = 8.$

60. $\frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{145}{72}$
$xy^3 + x^3y - x^2y^2 = \frac{73}{288}.$

61. $x^4 + y^4 = 337$
$x + y = 7.$

62. $x^4 + y^4 = 2657$
$x + y = 11.$

63. $x^4 - y^4 = 609$
$x - y = 3.$

64. $x^5 - y^5 = 3093$
$x - y = 3.$

65. $x^4 + y^4 = 706$
$x - y = 2.$

66. $x^4 + y^4 = 256\frac{16}{81}$
$x - y = \frac{10}{3}.$

67. $x^5 + y^5 = 3368$
$x + y = 8.$

68. $x^3 + y^3 = 152$
$x^2 - xy + y^2 = 19.$

69. $x + y + \sqrt{x + y} = 20$
$x^3 + y^3 = 1072.$

70. $x^3 - x^3 = 279$
$x^2 + xy + y^2 = 93.$

71. $x^3 + y^3 = 280$
$x^2 - xy + y^2 = 28.$

72. $x - \sqrt{x} + y + \sqrt{y} - 2\sqrt{xy} = 0$
$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5.$

73. $x^2 + xy + y^2 = 139$
$5y^2 - 4xy = -75.$

74. $x^2 - xy + y^2 = 7$
$3c^2 + 13xy + 8y^2 = 162.$

75. $x^2 + 3y^2 = 7$
$7x^2 - 5xy = 18.$

76. $x^2 + y\sqrt{xy} = 420$
$y^2 + x\sqrt{xy} = 280.$

77. $x^2 - y\sqrt{xy} = 126$
$y^2 - x\sqrt{xy} = -63.$

78. $x^3 + y^3 = 152$
$x^2y + xy^2 = 120.$

79. $x^3 - y^3 = 335$
$xy^2 - x^2y = -70.$

80. $x^3 + y^3 = 855$
$xy(x + y) = 840.$

81. $x^3 - y^3 = 602$
$xy(y - x) = -198.$

82. $x^2y^4 + y^2 = 17$
$xy^4 + y = 5.$

83. $(x^2 + y^2)(x + y) = 671$
$(x^2 - y^2)(x - y = 11.$

84. $(x + y)(x^2 + y^2) = 272$
$(x^2 - y^2)(x - y) = 32.$

85. $(x + y)(x^2 + y^2) = 1695$
$(x^2 - y^2)(x - y) = 15.$

86. $(x + y)(x^2 + y^2) = 175$
$(x^2 - y^2)(x - y) = 7.$

87. $(x^2 + y^2)(x^4 - y^4) = \frac{800}{9}x^2y^2$
$(x^2 + y^2)(x + y) = \frac{40}{3}xy.$

88. $(x^2 + y^2)(x + y) = 1484$
$x^2 + y^2 + x + y = 120.$

89. $(x^2 - y^2)(x + y) = 200$
$x^2 - y^2 + x + y = 30.$

90. $4x^2 + y^2 + 9y - 4x = 132$
$2xy + 3x - 4y = 39.$

91. $x^2 + xy + y^2 = 189$
$x - x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} + y = 9.$

92. $x + y = 6\sqrt[3]{x - y}$
$(x^3 + y^3)(x + y) = 12096.$

93. $x^{\frac{3}{5}} + y^{\frac{1}{2}} = 35$
$x^{\frac{1}{5}} + y^{\frac{1}{6}} = 5.$

94. $x^2y^2 - 18xy + 72 = 0$
$6x^2 - 17xy + 12y^2 = 0.$

95. $(x - y)(x + y) = 40$
$(3x + y)(3y + x) = 384.$

96. $x^4 + x^2y^2 + y^4 = 741$
$x^2 + xy + y^2 = 39.$

97. $x^4 + x^2y^2 + y^4 = 91$
$x^2 - xy + y^2 = 7.$

98. $(x^2 + y^2)(x^3 + y^3) = 3857$
$x + y = 7.$

99. $(x + y)(x^3 + y^3) = 175$
$x^2 + xy + y^2 = 19.$

100. $x^6 + y^5 = x^5 + y^6$
$x + y = 1.$

101. $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = \dfrac{25}{x + y}$
$x^3 - x^2y + xy^2 - y^3 = \dfrac{9}{x - y}.$

102. $\dfrac{x^3 - y^3}{x^2 - y^2} = 7$
$\dfrac{x^2 + y^2}{x + y} = 10.$

103. $\dfrac{x^3 + y^3}{x^3 - y^3} = \dfrac{175(x - y)}{19(x + y)}$
$x^2 + y^2 = 13.$

104. $x^6 + y^6 = 65$
$x^4 + y^4 = 17.$

105. $x^7 - y^7 = 2186$
$x - y = 2.$

106. $\dfrac{x^5 + y^5}{x^3 + y^3} = \dfrac{205}{13}$
$x^2 + xy + y^2 = 21.$

107. $\dfrac{1}{\sqrt{x - 12} + \sqrt{x}} - \dfrac{1}{\sqrt{x - 12} - \sqrt{x}} = \dfrac{2y}{27}$
$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 7.$

108. $\sqrt{\dfrac{6x}{x + y}} + \sqrt{\dfrac{x + y}{6x}} = \dfrac{5}{2}$
$xy - x - y = 9.$

109. $13y\sqrt{\dfrac{x^2}{y} + 3} = 6x^2 + 20y$
$24x^2 + y^2 = 2x(5y + 4x).$

110. $x\sqrt{\dfrac{x}{y}} - y\sqrt{\dfrac{y}{x}} = \dfrac{65}{6}$
$x - y = 5.$

---

111. $\dfrac{xy}{z} = 8$
$\dfrac{xz}{y} = 18$
$\dfrac{yz}{x} = \dfrac{9}{2}.$

112. $x(x + y + z) = 70$
$y(x + y + z) = 28$
$z(x + y + z) = 98.$

113. $x + y = \dfrac{5xyz}{96}$
$x + z = \dfrac{7xyz}{96}$
$y + z = \dfrac{xyz}{16}.$

114. $(x+y)(x+y+z)=98$
$(x+z)(x+y+z)=154$
$(y+z)(x+y+z)=140.$

115. $x+y=\frac{(x+y+z)}{60}xyz$
$x+z=\frac{2(x+y+z)}{75}xyz$
$y+z=\frac{7(x+y+z)}{300}xyz.$

116. $x(y+z)=90$
$y(x+z)=84$
$z(x+y)=48.$

117. $xyz=40(y+z-x)$
$xyz=24(x-y+z)$
$xyz=\frac{120(x+y-z)}{7}.$

118. $x^2+y^2+z^2=\frac{181}{144}$
$y^2+x=\frac{59}{48}$
$z^2+x=\frac{11}{12}.$

119. $8(x^2-z)^2=3(z^2-x)$
$xz+y=42$
$xyz=80.$

120. $xyz^2=1617$
$xy^2z=693$
$x^2yz=2541.$

121. $x^2+y^2=17z$
$x+y=\frac{5z}{3}$
$x-y=z.$

122. $(x+y)(z+x)=99$
$(x+y)(y+z)=44$
$(z+x)(y+z)=36.$

123. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=12$
$\frac{3}{x}+\frac{2}{y}=18$
$3y+10z=3.$

124. $x^2+y^2+z^2=50$
$y=x+z-4.$
$y(x+z)=32.$

125. $(2+x)(z-3)=30$
$(5-y)z=6$
$xy=32.$

126. $x^{-1}+y^{-1}+z^{-1}=13$
$y^{-1}-x^{-1}=1$
$x^{-1}y^{-1}-2z^{-1}=0.$

127. $xy+3xz-5yz=37$
$2xy-6xz-7yz=50$
$5xy-13xz-20yz=121.$

128. $x^2+y^2+z^2=\frac{481}{36}$
$x+y+z=\frac{37}{6}$
$xy=z^2.$

129. $x^2+y^2+z^2=139$
$x+y+z=19$
$yz=7x^2.$

130. $x^2-z(2y+z)=18$
$y^2-z(2x+z)=-2$
$x+2=4+y.$

131. $x+y+z=20$
$xy+xz+yz=121$
$xyz=210.$

132. $x^2+y^2+z^2=35$
$x+y+z=9$
$x(y+z)=20.$

133. $x^2 + y^2 + z^2 = 54$
$xy + xz + yz = 23$
$x + y = 8.$

134. $\left.\begin{array}{l} x^5 + 4x^4y + 5x^3y^2 \\ +5x^2y^3 + 4xy^4 + y^5 \end{array}\right\} = 2015.$
$x^2 + z = 16$
$y^2 + z = 16 - 5(x - y).$

---

135. $u + x = 5$
$y + z = 9$
$u + y^2 = 28$
$x + z^2 = 18.$

136. $x + y = 6$
$u + z = 10$
$x^2 + z^2 = 61$
$u^2 + y^2 = 17.$

137. $u + x = 10$
$y - z = 1$
$yz = 20$
$u^2 + y^2 = 74.$

138. $\left.\begin{array}{l} yu + yz + xu \\ + xz + uz \end{array}\right\} = 81$
$xyzu = 336$
$x + y = 15$
$z^2 + u^2 = 13.$

139. $\left.\begin{array}{l} xz + xu + yz \\ + 2xy + yu \end{array}\right\} = 192$
$x - y = 8$
$z + u = 9$
$xyzu = 462.$

140. $x^2 - y^2 - z^2 + u^2 = 90$
$xy = uz$
$x + y = 9$
$z + u = -9.$

141. $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 65$
$x + y = 7$
$z + u = 8$
$xy = uz.$

142. $x^3 + y^3 + z^3 + u^3 = 252$
$x + y = 5$
$z + u = 7$
$xy = uz.$

143. $x^3 + y^3 + z^3 + u^3 = 2548$
$x + y + z + u = 28$
$xy = uz = 36.$

144. $x^4 + y^4 + z^4 + u^4 = 1649$
$x + y = 7$
$z + u = 8$
$xy = zu.$

145. $x^4 + y^4 - z^4 - u^4 = 15600$
$x + y = 16$
$z + u = 14$
$xy = zu.$

146. $x + y + z + u = 21$
$x^4 + y^4 + z^4 + u^4 = 10897$
$xy = zu = 20.$

147. $x^5 + y^5 + z^5 + u^5 = 67100$
$x + y + z + u = 20$
$xy = zu = 18.$

148. $x^2 + y^2 = 52$
$z^2 + u^2 = 13$
$xy + zu = 30$
$xz + uy = 24.$

149. $x^3 + y^3 - z^3 - u^3 = 133$
$x^2 + y^2 - z^2 - u^2 = 15$
$x + y - z - u = 1$
$xy = zu.$

XLVIII

2. Equations littérales.

1. $x^2 + y^2 = a$, $x^2 - y^2 = b.$

2. $x - y = m$, $xy = n^2.$

3. $x^2 + y^2 = a^2$, $x + y = b.$

4. $x^2 + xy = a$, $y^2 + xy = b.$

5. $x^2y = a$, $xy^2 = b.$

6. $\frac{a^2}{x^2} + \frac{y^2}{b^2} = 8$, $\frac{a}{x} \cdot \frac{b}{y} = 1.$

7. $ax^2 + bxy = a$, $by^2 + axy = b.$

8. $xy = a$, $\frac{y}{x} = b.$

9. $x + y = a$, $x^2 + y^2 = bxy.$

10. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = a.$ $x + y = b^2.$

11. $x^2 + y^2 = a^2$, $x = by.$

12. $\frac{a}{x^2} - \frac{b}{y^2} = a^2 - b^2$, $\frac{a}{y^2} - \frac{b}{x^2} = a^2 + b^2.$

13. $x^2 + xy = m$, $y^2 + xy = n.$

14. $x^3 + xy^2 = p$, $y^3 + x^2y = q.$

15. $x^5 + xy^4 = a$, $y^5 + x^4y = b.$

16. $x^3 - y^3 = a(x - y)$, $x^3 + y^3 = b(x + y).$

17. $x^6 - y^6 = a(x^3 + y^3)$, $x^6 - y^6 = b(x^3 - y^3).$

18. $x^8 - y^8 = 13a^4(x^4 - y^4)$, $x^8 - y^8 = 3a^4(x^4 + y^4).$

19. $x = a\sqrt{x - y}$, $y = b\sqrt{x - y}.$

20. $m^2x^2 + n^2y^2 = q^2$, $\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2}.$

21. $ax^2 + b(x^2 + y^2) = m$, $cy^2 + d(x^2 + y^2) = n.$

22. $x^2 + xy + y^2 = a$, $x^3y + xy^3 = b.$

23. $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{a}.$ $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{b^2}.$

24. $x^2 + y^2 = \frac{m^2 + n^2}{2(x - y)}$, $2xy = \frac{m^2 - n^2}{2(x - y)}.$

25. $x^2 + y^2 = \frac{a^3 + b^3}{2(x + y)}$, $2xy = \frac{a^3 - b^3}{2(x + y)}.$

26. $x^2 + y^2 = a(x - y)$
$x^2 + y^2 = b(x + y)$.

27. $ax - by = m$
$a^3x^3 - b^3y^3 = nxy$.

28. $x^4 + y^4 + x^2 + y^2 = b(x^3 + y^3)$
$\frac{x}{y} = a$.

29. $\frac{x + y}{a} = \frac{x - y}{b}$
$x^2 + y^2 = m^2$.

30. $\frac{ax + by}{cx - dy} = \frac{p}{q}$
$x^2 + y^2 = m^2$.

31. $\frac{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}}{x\sqrt{x} - y\sqrt{y}} = \frac{a}{b}$
$x^3 - 5c^3 = y^3 + 3c^3$.

32. $\frac{(a + x)^2 + y^2}{(a + x)y} = \frac{5}{2}$
$x + y = b$.

33. $x^3(1 + y - y^2 - y^3) = a$
$x^3(y - 1 + y^2 - y^3) = b$.

34. $\frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 - xy + y^2} = \frac{a}{b}$
$x^3 + y^3 = c^3$.

35. $\frac{x^2 + xy - y^2}{a^2 + 4ab - b^2} = \frac{x - y}{4b}$
$x + y = a$.

36. $\sqrt{xy} + \sqrt{(1 - x)(1 - y)} = a$
$\sqrt{x(1 - y)} + \sqrt{y(1 - x)} = b$.

---

37. $\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$
$mx^2 + ny^2 + pz^2 = q^2$.

38. $\frac{x^2}{a} = \frac{y^2}{b} = \frac{z^2}{c}$
$bcx^2 + acy^2 + abz^2 = m^2$.

39. $x^2 + y^2 - z^2 = a^2$
$\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p}$.

40. $x(x + y + z) = a^2$
$y(x + y + z) = b^2$
$z(x + y + z) = c^2$.

41. $x(x + y - z) = m$
$y(x + y - z) = n$
$z(x + y - z) = p$.

42. $(x + y)(x + z) = a$
$(x + y)(y + z) = b$
$(x + z)(y + z) = c$.

43. $x + y + z = m$
$xy = n$
$xyz = p$.

44. $xy + x = a$
$yz + y = b$
$xz + z = c$.

45. $xy + a(x + y) = m^2$
$xz + a(x + z) = n^2$
$yz + a(y + z) = p^2$.

46. $x^2 - (y - z)^2 = a$
$y^2 - (x - z)^2 = b$
$z^2 - (x - y)^2 = c$.

47. $x^2 + (y - z)^2 = a$
$y^2 + (x - z)^2 = b$
$z^2 + (x - y)^2 = c$.

48. $x(y + z) = 4a^2$
$y(x + z) = 3a^2$
$z(x + y) = 2a^2$.

---

49. $x^2 + y^2 + z^2 = a$
$y^2 + z^2 + u^2 = b$
$z^2 + u^2 + x^2 = c$
$u^2 + x^2 + y^2 = d.$

50. $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = \frac{1}{a}$
$\frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{u^2} = \frac{1}{b}$
$\frac{1}{z^2} + \frac{1}{u^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{c}$
$\frac{1}{u^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{d}.$

51. $\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} = \frac{u^2}{d^2}$
$m^2x^2 + n^2y^2 + p^2z^2 + q^2u^2 = A^2.$

52. $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = c^2$
$x + u = a$
$y + z = b$
$ux = yz.$

53. $x + y + z + u = 2a$
$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 2b$
$x^3 + y^3 + z^3 + u^3 = 2c$
$xy = zu.$

54. $x^2 + y^2 = m$
$z^2 + u^2 = n$
$xy + zu = p$
$xu + yz = q.$

XLIX

VI. PROBLÈMES DONNANT DES ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ A PLUSIEURS INCONNUES.

1. Trouver deux nombres dont le produit soit 112 et la somme des carrés 260.

2. Quels sont les deux nombres dont la somme égale 40 et la somme des carrés 832?

3. Trouver deux nombres dont le produit soit 112 et le quotient du plus grand par le plus petit 7.

4. La somme de deux nombres est 6 fois plus petite que la différence de leurs carrés, et la somme des carrés est 306. Quels sont ces nombres?

5. Le rapport de deux nombres est 6 et la somme de leurs carrés est 592. Quels sont ces nombres?

6. Partager 84 en deux parties telles que la somme de leurs carrés soit 3560.

7. La somme de deux nombres est 37; la somme de leurs carrés surpasse de 9 le double du produit des nombres en question. Trouver ceux-ci.

8. La somme de deux nombres est 22 et la somme de leurs cubes 2926. Quels sont ces nombres?

9. La différence de deux nombres est 20 et la différence de leurs cubes 42560. Quels sont ces nombres?

10. Si au produit de deux nombres on ajoute le plus grand, on obtient 855; mais si au même produit on ajoute le plus petit nombre, on ne trouve que 828. Quels sont ces nombres?

11. La moitié du produit de deux nombres dépasse de 27 le décuple du plus grand, et de 77 le décuple du plus petit. Quels sont ces nombres?

12. Le produit de deux nombres est de 9 au-dessous du quintuple du plus grand, et de 16 au-dessus du quintuple du plus petit. Trouver ces nombres.

13. La somme des carrés de deux nombres est 410. Si l'on diminue le plus grand de 4 et qu'on ajoute 4 au plus petit, la somme des carrés des deux résultats est 394. Quels sont les deux nombres?

14. Un nombre compris entre 10 et 99 est tel que le produit de ses deux chiffres est égal au tiers du nombre. Si l'on intervertit les chiffres, le nouveau nombre ainsi obtenu surpasse de 18 le nombre donné. Quel est ce dernier?

15. Un nombre est formé de deux chiffres dont la somme est 13. Si à leur produit on ajoute 34, on trouve pour somme le nombre primitif renversé. Trouver ce nombre.

16. Le produit de deux nombres est égal à 3 fois leur somme, et la somme de leurs carrés est 160. Quels sont ces nombres?

17. Un berger, qu'on paye à raison de tant par mouton, a reçu pour la saison 320 fr. S'il avait eu 10 moutons de moins et qu'on lui eût donné 50 centimes de plus par tête, il aurait reçu 354 fr. De combien de moutons se composait son troupeau, et combien lui payait-on par tête?

18. Un berger, qu'on paye à raison de tant par mouton, a reçu pour la saison 320 fr. S'il avait eu 10 moutons de plus et qu'on

lui eût donné 50 centimes de moins par tête, il aurait reçu 354 fr. Combien lui payait-on par mouton, et combien de têtes comptait son troupeau?

19. Une femme apporte au marché des œufs dont elle retire 4 fr. 20. Si elle avait eu 12 œufs de plus et qu'elle eût vendu chaque œuf 2 centimes de plus, elle aurait aussi remporté de son marché 2 fr. 28 de plus. Combien avait-elle d'œufs, et combien les a-t-elle vendus la douzaine?

20. Un jardinier compte sur un pêcher un certain nombre de fruits dont il estime pouvoir retirer 6 fr. En les cueillant, il en trouve, cachés sous des feuilles, 4 de plus que son compte primitif, et il les vend la douzaine 15 centimes de plus qu'il n'espérait; il retire ainsi 7 fr. 15. Combien l'arbre portait-il de fruits et combien a été vendue chaque pêche?

21. On consacre 480 fr. à l'achat de drap noir et 360 fr. à l'achat de drap bleu, et en tout, on obtient 90 mètres d'étoffe. Si, en faisant la même dépense totale, on avait acheté du drap dont le prix du mètre eût été égal au prix moyen des deux premiers, on aurait eu $13\frac{7}{11}$ mètres d'étoffe de moins. Combien a-t-on acheté de mètres de drap noir et de drap bleu, et quel est le prix de chacune de ces étoffes?

22. En parcourant une distance de 2730 mètres, la roue de devant d'une voiture fait 392 révolutions de plus qu'une roue de derrière. Si l'on augmentait la circonférence de chaque roue de 3 décimètres, la roue de devant, en parcourant la même distance, ferait seulement 325 révolutions de plus qu'une roue de derrière. Quelle est la circonférence de chaque roue?

23. Une forteresse assiégée par l'ennemi a encore des vivres pour 8 jours. Si l'on en fait sortir 120 hommes, et qu'on donne à chacun de ceux qui restent $^4/_9$ kilg. de pain de moins par jour, la garnison pourra tenir 16 jours. Elle aura des vivres pour le même temps si l'on fait sortir 200 hommes et qu'on donne à chaque soldat restant $^2/_5$ kilg. de pain de moins que la ration primitive. Combien d'hommes compte la garnison, et quelle est la ration d'un homme?

24. Une garnison a encore du pain pour 11 jours. Elle reçoit un renfort de 200 hommes; si l'on veut faire durer les provisions autant qu'auparavant, il faut diminuer la ration de pain de cha-

que homme de $^1/_4$ livre. Si l'on diminuait la garnison de 300 hommes, ses provisions suffiraient pour 12 jours en donnant à chaque homme $^1/_4$ livre de pain de plus par jour. Quelle est la force de la garnison, et quelle est la ration journalière?

25. Une escouade d'ouvriers transporte un tas de pierres en 165 heures à une certaine distance. S'il y avait 8 ouvriers de plus et que chacun portât par voyage 2 kilog. de moins, le tas serait transporté en 140 heures. Mais si au lieu de cela, l'escouade primitive était diminuée de 8 hommes et que chacun portât 4 kilog. de plus par voyage, il faudrait 198 heures pour faire le travail. De combien d'hommes est l'escouade, et combien porte chaque homme par voyage ?

26. Un réservoir est à moitié rempli d'eau. Un premier tuyau pourrait le vider en un certain nombre d'heures, et un second tuyau pourrait achever de le remplir en un nombre d'heures différent du premier. Si on laisse couler les deux tuyaux ensemble, le bassin sera vide au bout de 12 heures. Si l'on diminue l'ouverture des tuyaux de manière qu'ils emploient 1 heure de plus, l'un pour mettre à sec le bassin, l'autre pour achever de le remplir, il faudrait $15\frac{3}{4}$ heures pour que le bassin fût vidé en laissant couler les deux tuyaux ensemble. Combien d'heures mettront : 1° le premier tuyau à vider le bassin plein ; 2° le second tuyau à remplir le bassin vide?

27. Un réservoir plein d'eau peut être vidé par un tuyau et un siphon. On fait couler le tuyau pendant les $^2/_3$ du temps qu'aurait mis le siphon seul à vider le réservoir, puis on ferme le tuyau et on fait couler le siphon jusqu'à épuisement complet du liquide. Si le tuyau et le siphon avaient coulé ensemble dès le commencement, ils auraient mis 2 heures de moins à vider le réservoir, et le tuyau n'aurait emporté que la moitié de ce qui a passé primitivement par le siphon. Combien de temps mettrait chaque canal séparément à vider le réservoir?

28. Les villes A et B sont reliées par un chemin de fer longeant une route. Une voiture part de A au moment où un train quitte B. Après avoir rencontré celui-ci, la voiture met encore 36 heures à arriver en B, et le train atteint A neuf heures après la rencontre. Combien d'heures ont mis la voiture et le train pour parcourir la distance AB ?

29. *A* part de Constance pour Berne au moment où *B* part de Berne pour Constance. Quand ils se rencontrent, *A* a fait 30 kilomètres de plus que *B*, et en continuant à marcher du même pas, il atteindra Berne en 4 jours, tandis que *B* mettra encore 9 jours pour arriver à Constance. Quelle est la distance de Berne à Constance?

---

30. La diagonale d'un rectangle est de 89 mètres. Si chaque côté du rectangle avait 3 mètres de moins, la diagonale aurait 85 mètres. Quelle est la longueur de chaque côté?

31. La diagonale d'un rectangle est de 65 centimètres. Si l'on ajoute 9 centimètres à la largeur du rectangle et qu'on retranche 3 centimètres de la longueur, la diagonale reste la même. Quelles sont les dimensions du rectangle?

32. L'hypoténuse d'un triangle rectangle est de 35 mètres. Si le plus petit côté de l'angle droit avait 5^{m} de moins et le plus grand 2^{m} de plus, l'hypoténuse aurait juste 1^{m} de moins. Quels sont les côtés de l'angle droit?

33. Deux jardins carrés ont une superficie totale de 2137 mètres carrés. Un terrain rectangulaire dont les dimensions seraient respectivement égales aux côtés des deux carrés aurait 1093 mètres carrés de moins que les deux jardins réunis. Quels sont les côtés des deux carrés?

34. Deux parquets de forme carrée ont ensemble une superficie de 9593 décimètres carrés. Placés bout à bout, ils auraient une longueur totale de $13^{m},5$. Quel est le côté de chacun d'eux?

35. La hauteur d'un trapèze est de 18^{m}. Sa surface est égale à celle d'un rectangle construit sur les deux bases parallèles; enfin le triple de la petite base ajouté à la grande base donne 4 fois la hauteur du trapèze. Quelles sont les deux bases?

36. La hauteur d'un trapèze est de 18^{m}. Sa surface est égale à celle d'un rectangle construit sur les deux bases parallèles; enfin le double de la grande base ajouté au triple de la petite donne une somme égale à 4 fois la hauteur du trapèze. Quelles sont les deux bases de ce dernier?

37. La somme des surfaces de deux cercles est de $13273,26^{cm}$

carrés, et la somme de leurs rayons 79 centim. Quels sont ces rayons[1] ?

38. Deux aiguilles montées sur des axes différents tournent dans le même plan. Lorsqu'elles ont fait une révolution, la surface totale des cercles décrits par les aiguilles est de 983,3208^{cm} carrés. Si l'on augmentait la longueur de chaque aiguille de deux centimètres, cette même surface serait de 1322,6136^{cm} carrés. Quelle est la longueur des aiguilles ?

39. La surface totale de deux sphères est 929,9136^{cm} carrés, et la somme de leurs rayons est 12 centimètres. Quels sont les rayons ?

40. La surface totale de deux sphères est 14388,528^{cm} carrés, et la différence de leurs rayons 9 centimètres. Quels sont ces rayons ?

41. La somme des volumes de deux sphères est de 14778,0864^{cm} cubes, et la somme de leurs rayons de 24 centimètres. Quels sont les rayons ?

---

42. Trois nombres sont tels que si on les multiplie deux à deux on trouve les produits 240, 160 et 96. Quels sont ces nombres ?

43. Trois nombres sont tels que si l'on multiplie chacun d'eux par la somme des trois, on trouve respectivement les produits 1400, 896 et 840. Quels sont ces nombres ?

44. La somme des trois côtés d'un triangle rectangle est de 208 mètres. La somme des côtés de l'angle droit surpasse de 30 m. la longueur de l'hypoténuse. Quels sont les trois côtés ?

45. Si d'un nombre de trois chiffres on retranche 198, on obtient un reste qui est écrit avec les mêmes chiffres que le nombre primitif, mais placés dans un ordre inverse. La somme des chiffres est 11, et la somme de leurs carrés 45. Quel est ce nombre ?

46. La surface d'un triangle rectangle est de 294 centimètres carrés. Si l'on construit un parallélipipède rectangle dont les

(1) Dans toutes les questions où l'on aura à faire usage du rapport de la circonférence au diamètre, on prendra $\pi = 3,1416$.

arêtes soient respectivement égales aux côtés de ce triangle, le volume de ce solide sera de 20580 centimètres cubes. Quels sont les trois côtés du triangle?

47. La surface totale d'un parallélipipède rectangle est de 192 centimètres carrés. Sa longueur excède de 5 centimètres la somme de la largeur et de la hauteur, et la diagonale du parallélipipède mesure 13 centimètres. Quelles sont les dimensions du solide?

48. La somme de trois quantités est 19; la somme de leurs carrés 133, et l'une d'elles est moyenne proportionnelle géométrique entre les deux autres. Quelles sont ces quantités?

49. Quelle serait la réponse à la question précédente si la somme des quantités était 117, et la somme de leurs carrés 6669?

50. Un nombre de trois chiffres est tel que le produit de ses chiffres divisé par leur somme donne $10\frac{2}{3}$; le nombre divisé par la même somme donne 48; enfin le chiffre des dizaines surpasse celui des unités d'autant qu'il est surpassé lui-même par celui des centaines. Trouver ce nombre.

---

51. Quelqu'un achète un chapeau, une canne, un parapluie et un couteau. Les deux premiers objets lui coûtent ensemble 24 fr. et les deux autres 21 fr. Si l'on multiplie les prix du chapeau et de la canne, on trouve le même produit qu'en multipliant ce que coûtent les deux autres articles. Enfin la somme des carrés des prix payés donne 585. Combien a coûté chaque article?

52. Quatre voyageurs A, B, C, D, se rencontrent et font le compte de leur dépense. A et B ensemble ont dépensé 102 fr.; C et D, 96 fr. Si l'on multipliait ensemble les sommes dépensées par C et D, on aurait pour produit 2108 fr. Enfin si l'on ajoutait ensemble les carrés des sommes dépensées, on aurait 10300 francs. Quelle est la dépense de chaque voyageur?

53. Si d'un nombre de quatre chiffres on soustrait celui qu'on obtient en écrivant les chiffres dans l'ordre inverse, on trouve 4725 pour reste. Le produit des chiffres est 672; le produit des deux chiffres moyens 28, et l'excès du chiffre des mille sur celui des unités est 5. Quel est ce nombre?

54. Le plus grand de deux champs rectangulaires a 204 mètres carrés de plus que l'autre, et la somme de leurs périmètres est de 136 mètres. Si, sur la longueur et la largeur de chaque champ, on construisait des carrés, la surface totale de ces quatre carrés aurait 620 mètres carrés de plus que les deux champs réunis ; mais si l'on construisait des carrés ayant pour côtés le quart du périmètre de chaque champ, la surface réunie de ces deux carrés n'excèderait que de 8 mètres carrés celle des deux champs. Trouver les dimensions de ces derniers.

55. Quatre quantités forment une proportion géométrique. La somme des termes extrêmes est 32 ; la somme des moyens 40, et la somme des carrés des quatre quantités est 1700. Déterminer ces quantités.

56. La somme des termes d'une proportion géométrique est 126 ; la somme de leurs carrés 6290, et le produit des moyens 462. Quels sont les quatre termes?

57. La somme des termes d'une proportion géométrique est 56, la somme de leurs cubes 13832, et le produit des extrêmes 180. Quels sont les termes de la proportion?

58. Quatre quantités forment une proportion continue. La somme de la première quantité et de la dernière est 35 ; la somme des deux autres 30. Quelles sont ces quantités ?

---

59. Le produit de la somme et de la différence de deux nombres est a ; le quotient de la somme divisée par la différence est b. Quels sont ces nombres?

60. Deux réservoirs cubiques ont ensemble une capacité de d décimètres cubes. L'arête du premier est à celle du second comme $a : b$. Quelle est l'arête de chaque réservoir?

61. On veut circonscrire sur une place publique, avec une corde de m mètres de longueur, un espace rectangulaire qui ait a mètres carrés de surface. Quels seront les côtés du rectangle?

Dans quel cas le problème est-il impossible ? Dans quel cas le rectangle devient-il un carré ?

62. Par un point pris sur la bissectrice d'un angle droit, mener une droite qui se termine aux côtés de l'angle, et fasse avec ceux-ci un triangle dont la surface soit égale à m^2 mètres carrés.

Dans quel cas le problème est-il impossible ?

CHAPITRE V

PROPRIÉTÉS DES RACINES. — DÉCOMPOSITION DU TRINOME DU SECOND DEGRÉ EN FACTEURS DU PREMIER DEGRÉ

L

1. Propriétés des racines de l'équation du second degré.

Soit l'équation $x^2 + px + q = 0$, et soient α et β ses racines ; on sait que

$$\left.\begin{array}{ll}(\text{A}) & \alpha + \beta = -p \\ (\text{B}) & \alpha\beta = q.\end{array}\right\} \quad \text{et (C)} \quad (x-\alpha)(x-\beta) = x^2+px+q \text{ [1]}.$$

Formez une équation du second degré dont les racines soient les suivantes :

1. 3 et 5. **2.** 7 et 3. **3.** 1 et 2. **4.** 8 et 17.

5. 3 et -1. **6.** -2 et 7. **7.** 5 et -6. **8.** -9 et 4.

9. $\frac{1}{2}$ et $\frac{2}{3}$. **10.** $\frac{3}{4}$ et $\frac{5}{6}$. **11.** 12 et $\frac{7}{8}$. **12.** 4 et $-\frac{2}{5}$.

13. -7 et $\frac{3}{8}$. **14.** -2 et $-\frac{1}{5}$. **15.** 1 et -1. **16.** 11 et -11.

17. -6 et -4. **18.** -2 et -10. **19.** -5 et -11.

20. -3 et $-\frac{1}{4}$. **21.** 4,3 et 2,5. **22.** 0,4 et 2,5.

23. $-0{,}7$ et 0, 3. **24.** $-8{,}2$ et 5,1. **25.** $-2{,}4$ et $-1{,}3$.

(1) Si l'équation est de la forme $ax^2 + bx + c = 0$, on a $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ $\alpha\beta = \frac{c}{a}$.

26. 2 et 0,5. **27.** 4 et 0,25. **28.** -7 et $-\frac{1}{7}$.

29. 5 et $-\frac{1}{5}$. **30.** -3 et $\frac{1}{3}$. **31.** $4+\sqrt{3}$, et $4-\sqrt{3}$.

32. $5+\sqrt{2}$, et $5-\sqrt{2}$. **33.** $1+\sqrt{11}$, et $1-\sqrt{11}$.

34. $8+2\sqrt{5}$, et $4-\sqrt{5}$. **35.** $\sqrt{7}$ et $\sqrt{3}$. **36.** $\sqrt{2}$ et $\sqrt{6}$.

37. $2+\sqrt{-3}$, et $2-\sqrt{-3}$. **38.** $5+\sqrt{-2}$, et $5-\sqrt{-2}$.

39. $1+\sqrt{-1}$, et $1-\sqrt{-1}$. **40.** $7\pm\sqrt{-17}$.

41. $3\pm\sqrt{-15}$. **42.** $8\pm\sqrt{-19}$. **43.** $\sqrt{-5}\pm 2$.

44. $\sqrt{-7}\pm 2$. **45.** $\sqrt{-2}\pm 1$.

---

46. a et b. **47.** $a+b$, et $a-b$. **48.** a, et a^2.

49. $a+3b$; $3a+b$. **50.** a, et $-a$. **51.** a, et $-b$.

52. $-m$; $-n$. **53.** $3m$; $-2m$. **54.** m; 2.

55. $\frac{a}{2}$; $\frac{1}{3}$. **56.** $a^3\pm\sqrt{-b}$. **57.** $m^5\pm\sqrt{-1}$.

58. $d\pm\sqrt{-c^3}$. **59.** $-c\pm\sqrt{-a}$. **60.** $p\pm r\sqrt{-r}$.

61. $-2e\pm\sqrt{-ab}$.

En appliquant la formule C, qui est générale, former une équation dont les racines soient :

62. 4; -1. **63.** 3; 9. **64.** n; 12. **65.** 3; 2; 1.

66. 4; 2; 1. **67.** 3; 0; 1. **68.** 2; -2; 3. **69.** 5; -1; 3.

70. 1; -1; 2; $\frac{1}{2}$. **71.** 3; $\frac{1}{3}$; 4; $\frac{1}{4}$. **72.** 3; -3; 2; -2.

73. 5; $-\frac{1}{5}$; 2; $-\frac{1}{2}$. **74.** 3; 2; 1; -1. **75.** 2; $\frac{1}{4}$; 3; -3.

76. 3; 4; 2; 1; $\frac{1}{3}$. **77.** 3; 3; -3; $+\sqrt{-1}$; $-\sqrt{-1}$.

LI

Soit l'équation $x^2 + px + q = 0$; $x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$.

1. Dans quel cas les racines sont-elles *réelles ?*

2. Quand sont-elles *imaginaires ?*

3. Etant réelles, quand sont-elles *inégales ?*

4. Quand sont-elles *égales ?*

5. Quand les deux racines sont-elles toutes les deux *positives ?*

6. Quand sont-elles toutes les deux *négatives ?*

7. Dans quel cas *la plus grande* en valeur absolue est-elle *positive* et la plus petite négative ?

8. Quand *la plus petite* est-elle *positive* et la plus grande négative ?

9. Quand les racines sont-elles *commensurables ?*

10. Quand sont-elles réelles et *irrationnelles ?*

Les racines des équations suivantes sont-elles réelles ou imaginaires, positives ou négatives ?

11. $x^2 - 6x + 8 = 0$.
12. $x^2 - 5x + 6 = 0$.
13. $x^2 - x - 12 = 0$.
14. $x^2 + 12x + 11 = 0$.
15. $x^2 + 9x + 8 = 0$.
16. $x^2 + 15x + 14 = 0$.
17. $4x^2 + 52x = 87$.
18. $x^2 + 25x - 26 = 0$.
19. $x^2 + 11x - 12 = 0$.
20. $8x + 20 = x^2$.
21. $x^2 - 21x - 46 = 0$.
22. $16x - 63 = x^2$.
23. $x^2 - 16x + 64 = 0$.
24. $x^2 = 18x - 81$.
25. $x^2 + 10x + 25 = 0$.
26. $2x^2 - 18x + 65 = 0$.
27. $x^2 - 31x + 246\frac{1}{2} = 0$.
28. $2x + 5 = x^2$.
29. $x^2 = 2 - 14x$.
30. $x^2 + 6x + 4 = 0$.
31. $x^2 + 8x + 25 = 0$.

---

32. Trouver, sans résoudre une équation du second degré, 1° la somme des carrés; 2° la somme des cubes de ses racines.

Faites l'application aux exemples suivants :

33. $x^2 - 24x - 25 = 0$. **34.** $x^2 - 15x + 56 = 0$.

35. $x^2 + 60x + 171 = 0$. **36.** $9x = 52 - x^2$.

37. $18x^2 - 27x + 10 = 0$. **38.** $mx^2 - 3a^2x - b^3 = 0$.

---

39. Quelle relation doit exister entre les coefficients de l'équation $x^2 + px + q = 0$, pour que les racines α et β de cette équation aient entre elles la relation $m\alpha + n\beta = a$?

Modifiez les équations suivantes du présent paragraphe de manière à établir entre les racines les relations que voici :

40. n° 11; $3\alpha + 2\beta = 20$. **41.** n° 12; $3\alpha + 5\beta = 17$.

42. n° 13; $5\alpha - 8\beta = 11$. **43.** n° 14; $\frac{\alpha}{2} + 3\beta = 9$.

44. Formez une équation dont les racines soient les valeurs réciproques des racines α et β de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

LII

2. Décomposition du trinome du second degré en facteurs du premier degré.

$$x^2 + px + q = (x - \alpha)(x - \beta)$$
$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta).$$

Les quantités α et β sont les racines des équations qu'on obtiendrait en égalant à zéro les premiers membres des égalités ci-dessus.

Décomposez les trinomes suivants en facteurs du premier degré.

1. $x^2 - 18x + 17$. **2.** $x^2 + 3x - 4$. **3.** $x^2 - 11x - 26$.

4. $x^2 - \frac{3}{2}x - 1$. **5.** $x^2 + 17x + 16$. **6.** $x^2 - 21x - 46$.

7. $20x - x^2 + 69$. 8. $29 - 28x - x^2$. 9. $17 - x^2 - 16x$.
10. $7x^2 + 8x + 1$. 11. $36x^2 - 60x - 11$.
12. $48x - 27x^2 - 13$. 13. $x^2 - 9x + 3$.
14. $x^2 - 5x - 4$. 15. $3x^2 + 2x - 5$. 16. $x^2 - 6x + 11$.
17. $x^2 + 8x + 28$. 18. $x^2 + 3$.

---

19. $x^2 - ax - 6a^2$. 20. $x^2 + a^2x - 2a^4$.
21. $x^2 - 2ax + a^2 - b^2$.
22. $x^2 - 2(a + b)x + 10ab - 3(a^2 + b^2)$.
23. $x^2 - 4m(x - m) - n^2$.
24. $x^2 - ax - (6a^2 + b^2) + 5ab$.
25. $x^2 - ax - a\sqrt{b} - b$. 26. $x^2 - 2cx + c^2 + 1$.
27. $x^2 + 2mx + m^2 + a^2$. 28. $ax^2 - (2d^2 + 3d)x + \frac{6d^3}{a}$.
29. $4m^2x^2 - 4mpx + p^2 - 1$. 30. $a^4x^2 - 2a^2mx + m^2 + 4$.

L'élève pourra en outre donner aux exemples 11 à 31, paragraphe LI, la forme $x^2 + px + q = 0$, et décomposer le premier membre en facteurs du premier degré.

Appliquez ce qui précède à la simplification des fractions suivantes :

31. $\frac{3x^2 - 10x + 3}{x^2 + 2x - 15}$. 32. $\frac{12y^2 - y - 6}{3y^2 + 5y + 2}$.

33. $\frac{x^2 - 18x + 77}{x^2 - 10x - 11}$. 34. $\frac{y^4 - y^2 - 6}{y^4 + 3y^2 + 2}$.

35. $\frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 3x - x\sqrt{3} - 3\sqrt{3}}$. 36. $\frac{x^2 - 4x + 7}{x^2 - 2x + 3 + 2\sqrt{-3}}$.

37. $\frac{y^2 + 51 - 14y}{y^2 + 9 - 8y + 6\sqrt{-2}}$. 38. $\frac{x^2 + 3 + 4\sqrt{-3} - 4x}{x^2 - (4 + \sqrt{-3})x + 4\sqrt{-3}}$.

39. $\frac{x^2 - ax - 6a^2}{x^2 - 7ax + 12a^2}$. 40. $\frac{x^2 - 2bx - 4a(a - 2b) - 3b^2}{x^2 - 4ax + 4a^2 - b^2}$.

41. $\dfrac{x^2-(a^2+b)x-2(a^4+b^2)+5a^2b}{x^2-3a^2x+2a^4+b(a^2-b)}$.

42. $\dfrac{x^2-2ax+a^2+1}{x^2-(a+b)x+ab-(a-b)\sqrt{-1}+1}$.

Décomposez pareillement les polynomes :

43. x^3-2x^2-5x+6. 44. x^3-8x^2+x+42.

45. $x^3-10x^2+31x-30$. 46. $6x^3+5x^2-12x+4$.

47. $5x^3+27x^2+25x-12$. 48. $4x^3-7x^2-5x+6$.

CHAPITRE VI

MAXIMA ET MINIMA DÉPENDANT DES ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

LIII

Déterminer les valeurs de x qui donnent aux expressions suivantes une valeur maximum ou minimum en donnant à x toutes les valeurs positives ou négatives.

1. $16-x^2$. 2. $(3+x)(3-x)$. 3. $x(8-x)$.

4. $x(x-10)$. 5. x^2-6x+5. 6. $2x^2+x-3\frac{7}{8}$.

7. $3x^2-4x-\frac{8}{3}$. 8. $(x-1)^2-3$. 9. $(4x-7)^2-8x$.

10. $12x-(3x-1)^2$. 11. $x^3+(4-x)^3-2$.

12. $(x-4)^3-x^3+20$. 13. $\dfrac{x-6}{x^2}$. 14. $\dfrac{x-1}{x^2}$.

15. $\dfrac{(x+12)(x-3)}{x^2}$. 16. $\dfrac{3+x}{3-x}+\dfrac{3-x}{3+x}$.

17. $\dfrac{1}{2+x}+\dfrac{1}{2-x}$. 18. $\dfrac{2x}{1+x^2}$. 19. $\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-2x+3}$.

20. $\dfrac{4x}{x^2+4x+4}$. 21. $\dfrac{m^2x^2+n^2}{(m^2-n^2)x}$. 22. $\dfrac{64x^2+36}{28x}$.

23. $\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}$. 24. $\frac{x^2-1}{x(x+1)}$. 25. $\frac{x^2-x-1}{x^2-x+1}$.

26. $\frac{25}{x}+x$. 27. $x+\frac{16}{x}$. 28. $\frac{(20+x)(5+x)}{x}$.

29. $\frac{2x^2+3x-5\frac{7}{8}}{x-3}$. 30. $\frac{2x^2-2x+5}{x^2-2x+3}$.

31. $\frac{4(x+2)}{4x^2+8x+9}$. 32. $\frac{x^2+4x+1}{x^2-4x+1}$.

33. $\frac{x^2+3x+5}{x^2+1}$. 34. $\frac{x-4}{x^2-3x-3}$. 35. $\frac{x}{a^2+x^2}$.

Donnez à x, dans les exemples suivants, des valeurs positives seulement.

36. $\frac{(x+1)^2}{x}$. 37. $\frac{x^2}{x-1}$. 38. $\frac{x^2-2x+1}{x-3}$.

39. $\frac{x^2-2x+2}{2(x-1)}$. 40. $\frac{x}{(x-3)(x-2)}$. 41. $\frac{x^2-4x+3}{x^2-1}$.

---

42. $x^3-x^2-16x+10$. 43. x^3-2x^2-x+3.

44. $2x^3-5x^2-4x+19$. 45. $\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+2x-21$.

Etudier la variation des fonctions suivantes : (1)

46. $y=x^2-6x+5$. 47. $y=x^4-25x^2+144$.

48. $y=x^4-8x^2-9$. 49. $y=x+\frac{1}{x}$.

50. $y=\frac{x^2-3}{2-x}$. 51. $y=\frac{x+4}{7-x^2}$.

52. $y=\frac{x^2-5x+1}{x^2-x+1}$. 53. $y=\frac{x^2-3x+4}{x^2-5x+4}$.

54. $y=\frac{x^2+3x+2}{x^2-3x+2}$. 55. $y=\frac{x^3-3}{2-x}$. 56. $y=\frac{x+4}{7-x^2}$.

(1) Sauf les nos 49, 50, 51, 55 et 56, ces exercices sont tirés de l'algèbre de M. Burat, du traité d'algèbre élémentaire de M. Lauvernay, et des questions d'algèbre élémentaire de M. Desboves. — Nous ne saurions trop engager les élèves à construire les courbes représentant la variation de ces fonctions. Cet exercice est une bonne préparation à l'étude de la géométrie analytique.

LIV

Problèmes renfermant des questions de maxima et de minima.

1. Un nombre donné $2a$ doit être partagé en deux parties additives dont le produit soit maximum. Déterminer ces parties.

2. De tous les rectangles dont le périmètre est $4a$, quel est celui dont la surface est maximum ?

3. Décomposer un nombre donné n en deux facteurs dont la somme soit minimum.

4. Partager un nombre $2a$ en deux parties telles que la somme de leurs racines carrées soit un maximum.

5. Diviser un nombre $2a$ en deux parties telles que la somme de leurs carrés soit un minimum.

6. Deux quantités ont entre elles une différence d. Déterminer entre la plus petite et la plus grande une troisième proportionnelle minimum.

7. Si $a + b =$ *constante posit.*, quelle relation doit exister entre a et b et leurs exposants respectifs, pour que le produit $a^m b^n$ soit maximum ? m et n sont des nombres entiers donnés.

8. Si le produit $a^m b^n$ est constant, quelle relation doit exister entre a et b et leurs exposants respectifs, qui sont des quantités données, pour que la somme $a + b$ soit minimum ?

9. Si a, b, c, d, etc., sont des quantités positives dont la somme soit constante, sous quelles conditions le produit $a^x b^y c^z d^u$ est-il maximum ?

---

10. De tous les triangles de même périmètre, quel est celui dont la surface est la plus grande ?

11. Quel est le plus grand de tous les rectangles qu'on peut inscrire dans un cercle ?

12. Inscrire dans un triangle un rectangle dont la surface soit maximum ?

13. Inscrire dans un cône dont le rayon de la base est R et la hauteur H un cylindre dont le volume soit maximum.

14. Inscrire dans un carré donné dont le côté est a un autre carré dont la surface soit minimum.

15. Circonscrire à un cylindre dont la hauteur est h et le rayon de la base r un cône de volume minimum.

16. Quel est le volume maximum que puisse engendrer un triangle isocèle inscrit dans un cercle et tournant autour de sa base ?

17. De tous les cylindres inscrits dans une sphère, quel est celui dont la surface latérale est maximum ?

18. De tous les triangles isocèles qu'on peut inscrire dans un cercle, quel est celui dont la surface est maximum ?

19. Du sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle, on abaisse une perpendiculaire a sur l'hypoténuse x. Le produit de cette perpendiculaire par l'un des segments s de l'hypoténuse est égal à une constante p^2. Quel est, dans ces conditions, le triangle dont l'hypoténuse est minimum ?

20. La somme des côtés x et y de l'angle droit d'un triangle rectangle étant constante et égale à a, quel est le triangle rectangle dans lequel la différence entre l'hypoténuse et la perpendiculaire h abaissée sur celle-ci du sommet de l'angle droit est minimum ?

21. De tous les cônes circonscrits à une sphère, quel est celui dont le volume est minimum ?

22. De tous les cônes inscrits dans une sphère, quel est celui dont la surface latérale est maximum ?

23. Une feuille de carton a la forme d'un carré, dont le côté est $2a$. Parallèlement aux côtés, et à égale distance de ceux-ci, on trace quatre lignes parallèles ; on enlève les carrés qu'elles forment aux angles, puis on relève les rectangles déterminés par les parallèles, pour faire une boîte. Quelle doit être la largeur x des bords de la boîte pour que celle-ci ait un volume maximum ?

CHAPITRE VII

DES LOGARITHMES

Les logarithmes furent considérés par leur inventeur, Napier, comme les termes d'une progression arithmétique correspondant à ceux d'une progression géométrique. Déjà Michel Stifel, en 1544, avait découvert le rapport qui existe entre les deux espèces de progressions et donné en quelque sorte la théorie des logarithmes, mais sans l'appliquer à la simplification du calcul. Plus tard, lord John Napier, baron écossais, dont les auteurs du continent écrivent le nom Néper, vit le parti pratique qu'on pouvait tirer de cette liaison. Il livra sa découverte au public en 1614, dans son ouvrage *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*. S'appuyant sur des considérations de mouvement, il prit pour ses logarithmes une base peu commode pour le calcul avec des nombres écrits dans le système décimal de numération.

Les tables renfermées dans l'ouvrage précité sont celles des sinus et de leurs logarithmes de minute en minute pour le premier quadrant. Napier voulait calculer les logarithmes des nombres dans un système plus pratique en prenant 10 pour base; mais il mourut en 1617. Son ami Briggs, professeur à Londres, qu'il avait pressé de calculer avec lui ces nouvelles tables, entreprit ce travail avec ardeur, et déjà en 1618, il publia les logarithmes à 8 décimales des 1000 premiers nombres. En 1624, il publia les logarithmes vulgaires à 14 décimales des nombres de 1 à 20 000 et de 90 000 à 100 000. Il mourut en 1630. Le libraire mathématicien hollandais Vlacq calcula les logarithmes de 20 000 à 90 000 et publia les premières tables complètes, à 8 décimales, dont il donna en 1628 une édition française in-folio, contenant les logarithmes vulgaires de 1 à 100 000.

Indépendamment de Napier et en même temps que celui-ci, un Suisse, Jobst Bürgi, découvrait les logarithmes et en publiait à Prague, en 1620, des tables que Kepler connaissait depuis longtemps. Le système de Bürgi avait pour base 1,00001.

On nomme logarithmes *vulgaires* ou *de Briggs* ceux dont la base est 10. Ceux qui ont pour base $e = 2.71828$, sont appelés logarithmes *naturels*, ou *népériens*. Ce sont ceux que l'on emploie habituellement dans les mathématiques supérieures. On les nomme encore logarithmes *hyperboliques*, parce que, si l'on rapporte une hyperbole équilatère à ses asymptotes, l'aire comprise entre la courbe et son asymptote, et comptée depuis l'ordonnée du sommet, est le logarithme naturel de l'abscisse correspondante. C'est Mercator qui découvrit ce rapport (1668).

LV

Soit l'équation $a^x = N$; x est dit le *logarithme* de N; a est la *base* du logarithme; N le *nombre* ou *logarithmande*, selon les auteurs allemands.

Les logarithmes, par rapport à la même base, de tous les nombres positifs et réels, forment un *système* de logarithmes.

La partie entière d'un logarithme est la *caractéristique*.

La partie décimale se nomme *mantisse*.

Peut-on prendre un nombre quelconque comme base d'un système? Peut-on prendre 0 et 1 ?

Pourquoi un nombre négatif ne convient-il pas comme base d'un système de logarithmes?

---

1. Quel est le logarithme de 1 ? Ce logarithme est-il le même dans tous les systèmes?

2. Quels sont les logarithmes de 2, 4, 16, 64, 128 dans le système dont la base est 2?

3. Quels sont les log. de 3, 81, 243, 729 dans le système dont la base est 3?

4. Dans la même base, quels sont les log. de $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{27}$, $\frac{1}{81}$, $\frac{1}{243}$?

5. Quels sont, pour la base — 6, les logarithmes de 36; 1296?

6. Quels sont, pour la base — 5, les log. de 25; 625; — 125?

7. Quels sont, pour la base $\frac{1}{3}$, les log. de $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$; $\frac{1}{243}$?

8. Quels sont, pour la base $\frac{1}{7}$, les log. de 49; 343?

9. Pour la base $\frac{2}{5}$, les log. de $\frac{125}{8}$; $\frac{625}{16}$?

10. Pour la base $\frac{4}{3}$, les log. de $\frac{64}{27}$; $\frac{27}{64}$; $\frac{81}{256}$?

11. Log. de 1 : *a)* pour la base 1; *b)* pour les bases 7; $\frac{5}{6}$; 18?

12. Pour la base $-\frac{2}{3}$, les log. de $-\frac{8}{27}$; $\frac{4}{9}$; $\frac{81}{16}$?

13. Pour la base 16, les log. de 4; 2; 8?

14. Pour la base 64, les log. de 4; 16; 32?

15. Pour la base 125, les log. de 5 ; 125 ; 625 ?

16. Pour quelles bases a-t-on : 1° log. 49 = 2 ; 2° log. 16 = 4 ; 3° log. $\frac{81}{10000} = 4$?

LVI

I. log. ab = log. a + log. b. III. log. $a^n = n$. log. a.

II. log. $\frac{a}{b}$ = log. a — log. b. IV. log. $\sqrt[n]{a} = \frac{1}{n}$ log. a.

Chercher, avec les tables à cinq décimales, les logarithmes des nombres suivants :

1. 8. **2.** 74. **3.** 129. **4.** 4139. **5.** 2004.
6. 8315. **7.** 11436. **8.** 10211. **9.** 16,21. **10.** 9,547.
11. 18,431. **12.** 8,361. **13.** 8,315. **14.** 25,03. **15.** 79,07.
16. 218,3. **17.** 3617,2. **18.** 0,21. **19.** 0,516. **20.** 0,018.
21. 0,073. **22.** 0,0025. **23.** 0,0028. **24.** 0,0009.
25. 0,000728. **26.** 0,000745. **27.** $\frac{11}{13}$. **28.** $\frac{41}{57}$. **29.** $7\frac{8}{9}$.
30. $9\frac{7}{11}$. **31.** $\frac{313}{518}$. **32.** $\frac{719}{1021}$. **33.** $\frac{2}{29}$. **34.** $\frac{7}{48}$.
35. $\frac{13,1}{725}$. **36.** $\frac{6,4}{311}$. **37.** $\frac{43}{154,2}$.

Chercher avec les tables à sept décimales les logarithmes de :

38. 27. **39.** 4129. **40.** 4721. **41.** 11791. **42.** 99227.
43. 36003. **44.** 43656. **45.** 517656. **46.** 461329.
47. 31,845. **48.** 751,211. **49.** 763,86. **50.** 4130,9.
51. 0,7612. **52.** 0,0045621. **53.** 0,00072111.
54. 0,000612. **55.** 0,0010219.

Chercher avec les tables à cinq décimales les logarithmes de :

56. 7^5. **57.** 13^4. **58.** 212^{14}. **59.** 2762^2. **60.** $3,171^4$.

61. $0{,}138^4$. **62.** $0{,}0796^5$. **63.** $0{,}086^{12}$. **64.** $0{,}7414^2$.

65. $0{,}007012^{20}$. **66.** $0{,}654^3$. **67.** $\sqrt[3]{28}$. **68.** $\sqrt{58}$. **69.** $\sqrt[7]{217}$.

70. $\sqrt[9]{454}$. **71.** $\sqrt[15]{319}$. **72.** $\sqrt[6]{31{,}2}$. **73.** $\sqrt[11]{918{,}4}$.

74. $\sqrt[7]{319{,}4}$. **75.** $\sqrt[20]{77{,}67}$. **76.** $\sqrt{0{,}0956}$. **77.** $\sqrt[4]{0{,}00084}$.

78 $\sqrt[3]{0{,}00514}$. **79.** $\sqrt[5]{0{,}000072}$. **80.** $\sqrt[6]{0{,}00000729}$.

81. $\sqrt[3]{0{,}0165}$. **82.** $\sqrt{0{,}00892}$. **83.** $\sqrt[3]{0{,}261}$. **84.** $\sqrt[5]{0{,}00427}$.

85. $\sqrt[6]{0{,}00289}$.

Avec les tables à sept décimales :

86. 48^3. **87.** 87^9. **88.** $42{,}5^3$. **89.** $0{,}8691^4$. **90.** $0{,}1871^3$.

91. $0{,}019271^5$. **92.** $\sqrt[4]{314261}$. **93.** $\sqrt[3]{218615}$. **94.** $\sqrt[7]{319{,}401}$.

95. $\sqrt[9]{31{,}2741}$. **96.** $\sqrt{0{,}036229}$. **97.** $\sqrt[3]{0{,}0062378}$.

98. $\sqrt[4]{0{,}0007142}$. **99.** $\sqrt{0{,}00062807}$. **100.** $\sqrt{0{,}13214}$.

101. $\sqrt[3]{0{,}026793}$. **102.** $\sqrt[5]{0{,}0013245}$. **103.** $\sqrt[4]{0{,}3892}$.

LVII

Chercher, ave[illegible] es tables à cinq décimales, les nombres correspondant aux [illegible]garithmes suivants :

1. 0,8451[illegible] [illegible]. 1,62325. **3.** 2,31597. **4.** 3,96918.

5. 2,79539. **6.** 1,48671. **7.** 2,42911. **8.** 3,12915.

9. 1,41318. **10.** 0,21844. **11.** 3,75032. **12.** 2,99019.

13. 1,78015. **14.** 0,67621. **15.** 4,69669. **16.** 2,58038.

17. 0,49072. **18.** 1,41725. **19.** 3,74559. **20.** 1,61518.

21. $\bar{1}{,}34479$. **22.** $\bar{2}{,}08814$. **23.** $\bar{3}{,}65379$. **24.** $\bar{2}{,}87029$.

25. $\bar{4}{,}98827$. **26.** $\bar{2}{,}92193$. **27.** $\bar{3}{,}83350$. **28.** $\bar{1}{,}67445$.

29. $\bar{2}{,}50505$. **30.** $\bar{1}{,}04042$.

Avec les tables à sept décimales :

31. 3,4743620. **32.** 4,6158449. **33.** 2,3496660.

34. 1,1924002. **35.** 3,9070188. **36.** 2,9230056.

37. 1,8310311. **38.** 3,6000249. **39.** 4,7480096.
40. 0,0360697. **41.** 2,3142617. **42.** 1,4052809.
43. 0,3004001. **44.** 4,2618326. **45.** 5,1234567.
46. 3,2101234. **47.** 0,5318642. **48.** 2,5511443.
49. 3,4422001. **50.** 1,6677223. **51.** $\bar{1}$,3140148.
52. $\bar{3}$,5542801. **53.** $\bar{4}$,9235311. **54.** $\bar{2}$,7610056.
55. $\bar{3}$,4271069. **56.** $\bar{1}$,0004041.

LVIII

Effectuez les opérations suivantes au moyen des logarithmes.

1. 256×311. **2.** 451×215. **3.** 299×36.
4. 255×498. **5.** $704 \times 0{,}21$. **6.** $1956 : 131$.
7. $7643 : 213$. **8.** $17291 : 714$. **9.** $86411 : 874$.
10. $9^5 \times 3^4$. **11.** $7^4 \times 4^{11}$. **12.** $35^2 \times 13^3$. **13.** 615×5^3.
14. $61^3 : 17^4$. **15.** $36^7 : 41^4$. **16.** $515^2 : 123^5$. **17.** $19^3 : 8^{10}$.
18. $\sqrt{141}$. **19.** $\sqrt[3]{4158}$. **20.** $\sqrt[7]{8976}$. **21.** $\sqrt[9]{76245}$.
22. $17\sqrt[3]{29}$. **23.** $158\sqrt[5]{0{,}39}$. **24.** $41\sqrt{0{,}512}$. **25.** $9{,}28\sqrt[4]{0{,}00394}$.
26. $0{,}42\sqrt[3]{0{,}0452}$. **27.** $0{,}8\sqrt[4]{0{,}0974}$. **28.** $5^3\sqrt[7]{0{,}0415^4}$.
29. $0{,}97^2\sqrt[3]{0{,}0069^5}$. **30.** $\dfrac{41^2\sqrt{613}}{153}$. **31.** $\dfrac{318\sqrt[3]{79}}{14^5}$. **32.** $\left(\dfrac{461}{786}\right)^3$.
33. $\left(\dfrac{515}{713}\right)^4$. **34.** $\left(\dfrac{219}{841}\right)^7$. **35.** $\sqrt{\dfrac{158}{417}}$. **36.** $\sqrt[5]{\dfrac{764}{931}}$.
37. $\sqrt[4]{\left(\dfrac{214}{719}\right)^3}$. **38.** $\dfrac{\sqrt[5]{0{,}35^4}}{\sqrt[3]{0{,}47^2}}$. **39.** $(41^3 - 68200)^2$.
40. $\dfrac{56(1{,}04^8 - 1)^7}{\sqrt{515}}$. **41.** $\sqrt[4]{381 + \sqrt[3]{58}}$. **42.** $\sqrt[3]{214 - \sqrt[2]{214}}$.
43. $\dfrac{\sqrt[3]{69 + 3\sqrt[5]{1{,}19}}}{18\sqrt{0{,}95}}$. **44.** $\dfrac{272\sqrt[3]{41 + 0{,}11\sqrt[4]{214}}}{(3\sqrt[5]{8{,}96})^3}$.

7. $20x - x^2 + 69$. **8.** $29 - 28x - x^2$. **9.** $17 - x^2 - 16x$.
10. $7x^2 + 8x + 1$. **11.** $36x^2 - 60x - 11$.
12. $48x - 27x^2 - 13$. **13.** $x^2 - 9x + 3$.
14. $x^2 - 5x - 4$. **15.** $3x^2 + 2x - 5$. **16.** $x^2 - 6x + 11$.
17. $x^2 + 8x + 28$. **18.** $x^2 + 3$.

---

19. $x^2 - ax - 6a^2$. **20.** $x^2 + a^2x - 2a^4$.
21. $x^2 - 2ax + a^2 - b^2$.
22. $x^2 - 2(a + b)x + 10ab - 3(a^2 + b^2)$.
23. $x^2 - 4m(x - m) - n^2$.
24. $x^2 - ax - (6a^2 + b^2) + 5ab$.
25. $x^2 - ax - a\sqrt{b} - b$. **26.** $x^2 - 2cx + c^2 + 1$.
27. $x^2 + 2mx + m^2 + a^2$. **28.** $ax^2 - (2d^2 + 3d)x + \frac{6d^3}{a}$.
29. $4m^2x^2 - 4mpx + p^2 - 1$. **30.** $a^4x^2 - 2a^2mx + m^2 + 4$.

L'élève pourra en outre donner aux exemples 11 à 31, paragraphe LI, la forme $x^2 + px + q = 0$, et décomposer le premier membre en facteurs du premier degré.

Appliquez ce qui précède à la simplification des fractions suivantes :

31. $\frac{3x^2 - 10x + 3}{x^2 + 2x - 15}$. **32.** $\frac{12y^2 - y - 6}{3y^2 + 5y + 2}$.

33. $\frac{x^2 - 18x + 77}{x^2 - 10x - 11}$. **34.** $\frac{y^4 - y^2 - 6}{y^4 + 3y^2 + 2}$.

35 $\frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 3x - x\sqrt{3} - 3\sqrt{3}}$. **36.** $\frac{x^2 - 4x + 7}{x^2 - 2x + 3 + 2\sqrt{-3}}$.

37. $\frac{y^2 + 51 - 14y}{y^2 + 9 - 8y + 6\sqrt{-2}}$. **38.** $\frac{x^2 + 3 + 4\sqrt{-3} - 4x}{x^2 - (4 + \sqrt{-3})x + 4\sqrt{-3}}$.

39. $\frac{x^2 - ax - 6a^2}{x^2 - 7ax + 12a^2}$. **40.** $\frac{x^2 - 2bx - 4a(a - 2b) - 3b^2}{x^2 - 4ax + 4a^2 - b^2}$.

41. $\dfrac{x^2 - (a^2 + b)x - 2(a^4 + b^2) + 5a^2b}{x^2 - 3a^2x + 2a^4 + b(a^2 - b)}$.

42. $\dfrac{x^2 - 2ax + a^2 + 1}{x^2 - (a + b)x + ab - (a - b)\sqrt{-1} + 1}$.

Décomposez pareillement les polynomes :

43. $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.
44. $x^3 - 8x^2 + x + 42$.
45. $x^3 - 10x^2 + 31x - 30$.
46. $6x^3 + 5x^2 - 12x + 4$.
47. $5x^3 + 27x^2 + 25x - 12$.
48. $4x^3 - 7x^2 - 5x + 6$.

CHAPITRE VI

MAXIMA ET MINIMA DÉPENDANT DES ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

LIII

Déterminer les valeurs de x qui donnent aux expressions suivantes une valeur maximum ou minimum en donnant à x toutes les valeurs positives ou négatives.

1. $16 - x^2$.
2. $(3 + x)(3 - x)$.
3. $x(8 - x)$.
4. $x(x - 10)$.
5. $x^2 - 6x + 5$.
6. $2x^2 + x - 3\frac{7}{8}$.
7. $3x^2 - 4x - \frac{8}{3}$.
8. $(x - 1)^2 - 3$.
9. $(4x - 7)^2 - 8x$.
10. $12x - (3x - 1)^2$.
11. $x^3 + (4 - x)^3 - 2$.
12. $(x - 4)^3 - x^3 + 20$.
13. $\dfrac{x - 6}{x^2}$.
14. $\dfrac{x - 1}{x^2}$.
15. $\dfrac{(x + 12)(x - 3)}{x^2}$.
16. $\dfrac{3 + x}{3 - x} + \dfrac{3 - x}{3 + x}$.
17. $\dfrac{1}{2 + x} + \dfrac{1}{2 - x}$.
18. $\dfrac{2x}{1 + x^2}$.
19. $\dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 2x + 3}$.
20. $\dfrac{4x}{x^2 + 4x + 4}$.
21. $\dfrac{m^2x^2 + n^2}{(m^2 - n^2)x}$.
22. $\dfrac{64x^2 + 36}{28x}$.

5. Quel serait le module pour passer des logarithmes vulgaires à ceux dont la base serait 7 ?

6. Par quel module passerait-on des logarithmes népériens à d'autres dont la base serait 5 ?

7. Calculer, avec cinq décimales, les logarithmes de 54, 121, 315 dans le système dont la base serait 12.

8. Calculer, avec cinq décimales, les logarithmes de 7, 11, 53 pour la base 3,5.

9. Sachant que $\log_{10} 5 = 0{,}6989700$, trouver dans le même système, et sans le secours des tables, les logarithmes de 2; 2,5; 6,25; 12,5; 0,032.

CHAPITRE VIII

DES PROGRESSIONS [1]

---

1. Des progressions arithmétiques.

LX

Qu'est-ce qu'une progression *arithmétique* ou *par différence?*

Qu'appelle-t-on la *raison* ou la *différence?*

Qu'est-ce qu'une progression *croissante?* — une progression *décroissante ?*

Connaissant un terme et la raison, comment forme-t-on le terme suivant? — le précédent?

---

(1) Rudolff (1526) traite déjà des progressions arithmétiques et des progressions géométriques. Pour la sommation des premières, il donne une règle qui revient à la formule connue. Sa règle pour trouver la somme des dernières revient à la formule $S = \frac{lr - a}{r - 1}$. Il propose, presque sous la forme où on les trouve de nos jours, les problèmes 8 et 10, page 192.

Si l'on représente, dans une progression arithmétique, par
a le premier terme, l le dernier terme,
d la raison, s la somme des termes,
n le nombre des termes,
on a les deux formules fondamentales suivantes :

$$l = a + (n-1)d; \quad s = \frac{(a+l)n}{2} = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}.$$

Si, des cinq quantités qui y figurent, trois sont données, on peut toujours trouver les deux autres. Tous les cas qui peuvent se présenter sont résumés ci-dessous :

	Étant données.	Trouver.		Étant données.	Trouver.
1°	a, d, n	l, s.	6°	a, n, s	d, l.
2°	a, l, n	d, s.	7°	l, n, s	d, a.
3°	l, d, n	a, s.	8°	d, n, s	l, a.
4°	a, l, d	n, s.	9°	a, d, s	l, n.
5°	a, l, s	d, n.	10°	l, d, s	a, n.

Ces problèmes sont du premier degré, sauf les deux derniers, qui sont du second degré.

Trouver le dernier terme et la somme des termes des progressions suivantes :

1. 7, 11, 15... (13 termes). **2.** 4, 18, 32... (16 t.).

3. 5, 8, 11... (12 t.). **4.** 0, 9, 18... (47 t.).

5. $\frac{1}{2}$, $6\frac{1}{2}$, $12\frac{1}{2}$... (30 t.). **6.** 2, $2\frac{1}{2}$, 3... (25 t.).

7. 1; 1,1; 1,2;... (200 t.). **8.** 0,4; 0,6; 0,8;... (50 t.).

9. $\frac{4}{7}$, $\frac{9}{7}$, $\frac{14}{7}$... (15 t.). **10.** 56, 53, 50... (11 t.).

11. 63, 58, 53... (8 t.). **12.** 16, $15\frac{1}{2}$, 15... (20 t.).

13. $3n$, $5n$, $7n$... (36 t.). **14.** a, $a+b$, $a+2b$... (30 t.).

15. $2m$, $2m+4n$, $2m+8n$... (14 t.).

16. $5x$, $5x+3y$, $5x+6y$... (15 t.).

17. 1, $1+3m$, $1+6m$... (11 t.).

Trouver la raison et la somme des termes des progressions

suivantes, dont on donne le premier et le dernier termes, ainsi que le nombre des termes.

18. 9... 162. (52 t.). **19.** 2... 134. (13 t.).
20. 1... 81. (17 t.). **21.** 0... 200. (51 t.).
22. 11... 101. (61 t.). **23.** $3\frac{1}{4}$... 64. (82 t.).
24. 36... 8. (15 t.). **25.** 169... 8. (24 t.).
26. 57... 30. (19 t.). **27.** 7... — 3,5. (36 t.).
28. $3h$.... $71h$. (18 t.). **29.** $5a^3$... $145a^3$. (21 t.).
30. $2b^2$... $(2b^2 + 17a^3)$. (35 t.).

Trouver la raison pour insérer des moyens par différence entre deux nombres donnés.

31. Entre 4 et 26, 10 moyens. **32.** 13 et 76, 8 m.
33. 5 et 62, 18 m. **34.** 1 et 2, 15 m. **35.** 4 et 10, 25 m.
36. $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{4}$, 8 m. **37.** 7 et — 9, 7 m. **38.** 47 et 2, 8 m.
39. $36a^2$ et $4a^2$, 15 m.

Dans les progressions suivantes, dont on donne le nombre des termes, ainsi que les deux derniers, trouver le premier et la somme des termes.

40. ...142, 149 ; $n = 22$. **41.** ...228, 233 ; $n = 44$.
42. ...221, 242 ; $n = 12$. **43.** ...160, 163 ; $n = 54$.
44. ...$26\frac{1}{3}$, $27\frac{5}{6}$; $n = 19$. **45.** ...17,1 ; 17,8 ; $n = 26$.
46. ... — 20, — 22 ; $n = 40$. **47.** ...16, 13 ; $n = 58$.
48. ...5, 0 ; $n = 14$.

Dans les exercices suivants, on donne les termes extrêmes et la raison ; trouver le nombre et la somme des termes.

49. 28... 268 ; $d = 6$. **50.** 17... 350 ; $d = 9$.
51. 14,5... 32 ; $d = 0,7$. **52.** 34... 10 ; $d = -2$.
53. 161... 17 ; $d = -4$. **54.** $116\frac{1}{4}$... 0 ; $d = -\frac{5}{4}$.
55. — 28... 28 ; $d = 7$.

Etant donnés les termes extrêmes et la somme des termes, trouver la raison et le nombre des termes.

56. $1\frac{1}{2}$... 54; $s = 999$.
57. 0,4... 58,9; $s = 1956{,}9$.
58. 5... 161; $s = 3320$.
59. 1... 77; $s = 936$.
60. 2... 87; $s = 801$.
61. 0,7... 6,5; $s = 108$.
62. — 13.... 27; $s = 77$.
63. 160... 15; $s = 1050$.

Etant donnés le premier terme, le nombre et la somme des termes, trouver la raison et le dernier terme.

64. $a = 10$; $n = 14$; $s = 1050$.
65. $a = 3$; $n = 50$; $s = 3825$.
66. $a = 1$; $n = 20$; $s = 305$.
67. $a = -45$; $n = 31$; $s = 0$.
68. $a = 0$; $n = 30$; $s = 290x$.
69. $a = 26$; $n = 10$; $s = -55$.
70. $a = 16$; $n = 9$; $s = 0$.
71. $a = 25$; $n = 12$; $s = -30$.

Etant donnés le dernier terme, ainsi que le nombre et la somme des termes, trouver le premier terme et la raison.

72. $l = 21$; $n = 7$; $s = 105$.
73. $l = 49$; $n = 19$; $s = 503\frac{1}{2}$.
74. $l = 148$; $n = 27$; $s = 2241$.
75. $l = 92$; $n = 11$; $s = 517$.
76. $l = 11\frac{2}{3}$; $n = 37$; $s = 209\frac{2}{3}$.
77. $l = -143$; $n = 33$; $s = -2079$.
78. $l = 105$; $n = 16$; $s = 840$.
79. $l = 29$; $n = 17$; $s = 221$.

Etant donnés le nombre et la somme des termes, ainsi que la raison, trouver le premier terme et le dernier.

80. $n = 21$; $s = 1197$; $d = 4$.
81. $n = 35$; $s = 2485$; $d = 3$.
82. $n = 12$; $s = 594$; $d = 7$.

83. $n = 50$; $s = 425$; $d = \frac{1}{3}$.

84. $n = 25$; $s = -75$; $d = \frac{1}{2}$.

85. $n = 19$; $s = 38$; $d = \frac{2}{3}$.

86. $n = 33$; $s = -33$; $d = -\frac{3}{4}$.

87. $n = 34$; $s = -158\frac{2}{3}$; $d = -\frac{1}{3}$.

Connaissant la somme des termes, le premier terme et la raison, trouver le nombre des termes et le dernier de ceux-ci.

88. $s = 1095$; $a = 38$; $d = 5$.

89. $s = 4784$; $a = 41$; $d = 2$.

90. $s = 624$; $a = 9$; $d = 4$.

91. $s = 157\frac{1}{2}$; $a = 4\frac{1}{2}$; $d = 2\frac{1}{2}$.

92. $s = 2551{,}3$; $a = 32$; $d = 0{,}3$.

93. $s = 2877$; $a = 7$; $d = 3$.

94. $s = 1782$; $a = 18$; $d = 6$.

95. $s = 1425\frac{2}{3}$; $a = 25\frac{2}{3}$; ; $d = 2\frac{1}{3}$.

Trouver le premier terme et le nombre des termes d'après les données suivantes :

96. $s = 623$; $d = 5$; $l = 77$.

97. $s = 5236$; $d = 3$; $l = 176$.

98. $s = 1008$; $d = 4$; $l = 88$.

99. $s = 281\frac{1}{7}$; $d = \frac{3}{7}$; $l = 15\frac{3}{7}$.

100. $s = 682\frac{1}{2}$; $d = 1\frac{1}{2}$; $l = 45$.

101. $s = 345$; $d = 0{,}2$; $l = 11{,}8$.

102. $s = 2640$; $d = -20$; $l = 15$.

103. $s = 95172$; $d = -7$; $l = 567$.

LXI

1. Quelle est la somme des 200 premiers nombres naturels ?

2. Quelle est la somme des nombres pairs de 0 jusqu'à 200 ?

3. Quelle est la somme des nombres impairs de 1 à 200 ?

4. Quelle est la somme des 50 premiers multiples de 7 ?

5. Quelle est la somme des 30 premiers multiples de 13 ?

6. Combien une pendule qui ne sonne que les heures frappe-t-elle de coups en 24 heures ?

7. Quel est le 62e multiple de 17, à partir de 85 inclusivement ?

8. Un homme met à la caisse d'épargne le premier mois, 6 fr., et chaque mois suivant 1 fr. 50 de plus que le mois précédent. Combien aura-t-il versé au bout de 12 ans 3 mois ?

9. Au moment où un train arrive au sommet d'une longue rampe, le dernier wagon se détache, et se met à descendre en parcourant 50cm dans la première seconde ; 3 fois 50cm dans la deuxième ; 5 fois 50cm dans la troisième, etc. Au bout de 12 minutes, il va se briser au bas de la rampe. Quelle était sa vitesse dans la dernière seconde ?

10. Dix-huit amis sont assis autour d'une table. L'un d'eux porte un toast après lequel chaque convive choque son verre une fois avec chacun des assistants. Combien y eut-il de chocs ?

11. Un cavalier fait ferrer son cheval des quatre pieds. Le maréchal-ferrant lui demande 2 fr. par fer, ou 1 centime pour le premier clou, 3 cent. pour le second, 5 cent. pour le troisième, etc. Chaque fer a 8 clous. Le cavalier doit-il accepter la seconde proposition ?

12. On met en ligne droite, sur une pelouse horizontale, 50 œufs à 3 mètres de distance les uns des autres. Une personne doit les relever un à un et les porter dans un panier à 3 mètres du premier œuf, pendant qu'un coureur partant aussi du panier va toucher un but et revient. A quelle distance doit être le but pour que les deux coureurs aient la même distance à parcourir ?

13. A partir d'une caisse, on place sur une ligne droite 40 pierres à des distances de 1^m, 3^m, 5^m, etc. Une personne placée près de la caisse doit aller les prendre et les y apporter une à une. Quelle distance totale parcourra-t-elle ?

14. Une pierre qui tombe librement parcourt respectivement dans les trois premières secondes de sa chute $4^m,9$; $3 \times 4^m,9$; $5 \times 4^m,9$. Dans la célèbre ascension en ballon qu'il fit en 1875, M. Tissandier s'éleva à $8643^m,6$. Quelle vitesse aurait eue, en arrivant sur le sol, une pierre tombée du ballon? (1)

15. Un médecin, au retour d'une longue absence, invite à dîner d'anciens camarades d'étude. En entrant au salon, chacun de ces derniers échange une poignée de mains avec ceux qui sont présents. En tout, il fut échangé 231 poignées de mains. Combien d'amis se trouvaient réunis?

16. Un corps qui s'élève verticalement se meut avec une vitesse qui décroît de la même manière que croît la vitesse d'une pierre qui tombe ; dans la dernière seconde, le corps qui monte parcourt $4^m,9$; dans l'avant-dernière seconde, $3 \times 4^m,9$; dans la précédente $5 \times 4^m,9$. En supposant qu'un boulet ayant au sortir de la pièce une vitesse de $445^m,9$ par seconde, fût lancé verticalement, on demande : 1° Pendant combien de temps il monterait ; 2° à quelle hauteur il arriverait?

17. Combien de temps mettrait à atteindre le sol une pierre tombant du sommet du dôme du Panthéon, à Paris? Le point le plus élevé de la coupole est à une hauteur de 83 mètres.

18. Le produit de cinq nombres en progression arithmétique est 379 440, et leur somme est 85. Quels sont ces nombres?

19. La somme de trois nombres en progression arithmétique est 33 et la somme de leurs carrés 461. Quels sont ces nombres?

20. La somme de cinq termes en progression arithmétique est 50 et la somme de leurs carrés 590. Quels sont ces termes?

21. La somme de 11 nombres en progression arithmétique est 77 et la somme de leurs carrés 1529. Quels sont ces nombres?

22. Quelqu'un qui a un capital de 18000 fr. placé au $4\frac{1}{2}$ % y

(1) Dans les questions de ce genre, on négligera la résistance de l'air. — Dans le nombre $8643^m,6$ les unités et la fraction ont été ajoutées pour amener une valeur entière de n.

ajoute à la fin de chaque année 200 fr. portant intérêt au même taux. A combien s'élèvera la somme des intérêts simples accumulés à la fin de la 20e année?

23. Une pièce de canon lance verticalement de bas en haut un boulet qui, au sortir de la pièce, a une vitesse de 406m,7 par seconde. A l'instant où ce boulet commence à redescendre, on lance un second boulet avec la même vitesse initiale. On demande : 1° Combien de secondes après le dernier coup de canon aura lieu la rencontre des boulets ; 2° à quelle hauteur se fera cette rencontre. L'espace parcouru dans la première seconde par un corps qui tombe est 4m,9.

LXII

Si l'on représente par S_2 la somme des carrés et par S_3 la somme des cubes des nombres naturels de 1 à n inclusivement, on a :

$$S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1.\ 2.\ 3}. \qquad S_3 = \left[\frac{n(n+1)}{1.\ 2}\right]^2.$$

Si l'on représente par N le nombre des boulets contenus dans une pile, et par n le nombre des boulets sur chaque côté de la tranche inférieure, on a :

Pile à base carrée : $N = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1.\ 2.\ 3}.$

» triangulaire : $N = \frac{n(n+1)(n+2)}{1.\ 2.\ 3}.$

» rectangulaire : $N = \frac{n(n+1)(3m-n+1)}{1.\ 2.\ 3}.$

Dans cette dernière formule, m est le nombre de boulets sur le grand côté de la base, et n le nombre sur le petit côté.

Quelle est la somme des carrés des nombres naturels entre les limites suivantes, inclusivement ?

1. De 1 à 13. **2.** De 1 à 40. **3.** De 1 à 53.

4. De 1 à 100. **5.** De 1 à 125. **6.** De 1 à 315.

7. De 1 à 812. **8.** De 1 à 1000. **9.** De 1 à 1234.
10. De 1 à 1879. **11.** De 11 à 51. **12.** De 24 à 92.
13. De 56 à 100. **14.** De 30 à 125. **15.** De 50 à 200.

Quelle est la somme des cubes des nombres naturels entre les limites suivantes, inclusivement?

16. De 1 à 15. **17.** De 1 à 24. **18.** De 1 à 39.
19. De 1 à 70. **20.** De 1 à 80. **21.** De 1 à 100.
22. De 1 à 85. **23.** De 15 à 29. **24.** De 20 à 50.
25. De 25 à 64. **26.** De 32 à 90. **27.** De 7 à 35.

Quel est le nombre des boulets contenus dans une pile complète à base carrée ayant sur chaque côté de sa base :

28. 6 boulets. **29.** 15 boulets. **30.** 12 boulets.
31. 10 boulets. **32.** 9 boulets. **33.** 7 boulets.
34. 17 boulets. **35.** 21 boulets. **36.** 27 boulets.

Quel nombre de boulets contient une pile tronquée à base carrée ayant :

37. Base infér. 11 boulets.
base sup. 5 boulets.

38. Base infér. 9 b.
base sup. 4 b.

39. Base infér. 14 b.
base sup. 6 b.

40. Base infér. 17 b.
base sup. 9 b.

41. Base infér. 18 b.
base sup. 5 b.

42. Base infér. 16 b.
base sup. 6 b.

Combien de boulets renferme une pile triangulaire complète ayant sur chaque côté :

43. 6 boulets. **44.** 12 boulets. **45.** 17 boulets.
46. 10 boulets. **47.** 19 boulets. **48.** 25 boulets.

Combien de boulets renferme une pile triangulaire tronquée ayant :

49. Base infér. 14 boulets.
base sup. 6 b.

50. Base infér. 17 boulets.
base sup. 13 b.

51. Base infér. 24 b.
base sup. 17 b.

52. Base infér. 20 b.
base sup. 14 b.

Combien de boulets renferme une pile rectangulaire ayant sur les deux côtés de la base inférieure :

53. 11 et 5 boulets. **54.** 7 et 5 b. **55.** 9 et 4 b.

56. 16 et 9 b. **57.** 21 et 13 b. **58.** 24 et 17 b.

59. 22 et 15 b. **60.** 31 et 19 b. **61.** 27 et 23 b.

Calculer le nombre des boulets qui forment une pile rectangulaire tronquée ayant :

62. Base inf. 19 et 14 b.
base sup. 15 et 10 b.

63. Base inf. 22 et 16 b.
base sup. 16 et 10 b.

64. Base inf. 18 et 11.
base sup. 11 et 4.

65. Base inf. 28 et 19 b.
base sup. 19 et 10 b.

LXIII

2. Des progressions géométriques.

Qu'est-ce qu'une progression *géométrique* ou *par quotient* ?

Qu'appelle-t-on la *raison* ?

Connaissant un terme et la raison, comment forme-t-on le terme suivant ? — Le précédent ?

Quand est-ce qu'une progression géométrique est *croissante* ? Quand est-elle *décroissante* ?

Soient, dans une progression géométrique, a le premier terme, l le dernier, n le nombre des termes, r la raison, S la somme des termes, on a :

$$\text{(I)}\ l = ar^{n-1}\,; \qquad \text{(II)}\ S = \frac{lr - a}{r - 1} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1},$$

ou pour les progr. décroissantes : $S = \dfrac{a(1 - r^n)}{1 - r}$.

Que devient la dernière formule pour les progressions décroissantes à l'infini ?

Si, des cinq quantités qui figurent dans (I) et (II), trois sont connues, on peut trouver les deux autres, ce qui donne dix problèmes, comme pour les progressions arithmétiques. Dans deux cas, quand les inconnues sont r et l ou r et a, on est conduit à des équations du degré $n - 1$.

Trouver le dernier terme et la somme des termes des progressions géométriques suivantes :

1. 4, 8, 16... (7 termes).
2. 2, 6, 18... (9 t.).
3. 1, 4, 16... (7 t.).
4. 9, 3, 1... (11 t.).
5. 13; 1,3; 0,13... (6 t.).
6. 56, 28, 14... (12 t.).
7. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\cdots$ (10 t.).
8. 1 ; 1,5 ; 2,25... (6 t.).
9. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ à l'infini.
10. $8, 2, \frac{1}{2}$ à l'infini.
11. $2, \frac{2}{7}, \frac{2}{49}$ à l'infini.
12. $5, 3, \frac{9}{5}$ à l'infini.
13. $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}$ à l'infini.
14. m^3, m^3n, m^3n^2 (7 t).
15. $a, a(1+x), a(1+x)^2\ldots$ (8 t.).
16. $a, \frac{a}{a^2-1}, \frac{a}{(a^2-1)^2}\cdots$ (10 t.).
17. $b, \frac{b}{1-m}, \frac{b}{(1-m)^2}\cdots$ (9 t.).
18. $b(1+x)^{n-1}, b(1+x)^{n-2}, b(1+x)^{n-3}\ldots$ (n termes).

Trouver la raison et la somme des termes, connaissant les termes extrêmes et le nombre des termes.

19. 8... 10368 (5 termes).
20. 2... 31250 (7 t.).
21. $36\ldots \frac{4}{81}$ (7 t.).
22. 3... 49152 (8 t.).
23. $48\ldots \frac{3}{64}$ (6 t.).
24. 7... 3584 (10 t.).

Entre les termes suivants, insérer le nombre de moyens proportionnels indiqué.

25. 14 et 686, 1 moyen.
26. 47 et 1269, 2 m.
27. 31 et 496, 3 m.
28. 13 et 101088, 4 m.
29. 81 et $\frac{256}{81}$, 7 m.
30. 128 et 31250, 5 m.

31. $\frac{5}{64}$ et 640, 12 m. **32.** $\frac{2}{243}$ et 1458, 10 m.

33. 6250 et $\frac{2}{3125}$ 9 m.

Connaissant le dernier terme, la raison et le nombre des termes, calculer a et S.

34. $l = 128$; $r = 2$; $n = 7$. **35.** $l = 78\,125$; $r = 5$; $n = 8$.

36. $l = 29\,296\,875$; $r = 5$; $n = 11$.

37. $l = 14\frac{2150}{2187}$; $r = \frac{4}{3}$; $n = 8$.

38. $l = \frac{15\,309}{262\,144}$; $r = \frac{3}{8}$; $n = 8$.

39. $l = \frac{2}{27}$; $r = \frac{1}{3}$; $n = 5$.

Connaissant a, l et r, trouver S et n.

40. $a = 9$; $l = 2304$; $r = 2$.

41. $a = 2$; $l = 64$; $r = 2$.

42. $a = 3$; $l = 192\sqrt{2}$; $r = \sqrt{2}$.

43. $a = 54$; $l = \frac{2}{243}$; $r = \frac{1}{3}$. **44.** $a = 9$; $l = \frac{32}{27}$; $r = \frac{2}{3}$.

Connaissant a, l et S, trouver r et n.

45. $a = 2$; $l = 1458$; $S = 2186$.

46. $a = 1$; $l = 2401$; $S = 2801$.

47. $a = 10$; $l = \frac{5}{16}$; $S = 19\frac{11}{16}$.

48. $a = 3125$; $l = 5$; $S = 3905$.

Trouver les deux inconnues dans les exemples suivants :

49. $a = 3$; $r = 3$; $S = 29\,523$.

50. $a = 8$; $r = 2$; $S = 4088$.

51. $r = 2$; $n = 7$; $S = 635$.

52. $r = 8$; $n = 6$; $S = 149\,796$.

53. $l = 1296$; $r = 6$; $S = 1555$.

54. $l = 32\,768$; $r = 4$; $S = 43\,690$.

55. $a = 18$; $n = 3$; $S = 1026$.

LXIV

1. Un tonneau contient 240 litres de vin. Le 1er janvier, on en soutire la moitié ; le jour suivant la moitié du reste ; le troisième jour la moitié du nouveau reste, et ainsi de suite. Combien en aura-t-on soutiré le soir du 31 janvier ?

2. Que vaut la fraction décimale 0,333..... ?

3. Quelle est la valeur de la fraction décimale 0,7272..... ?

4. La somme des 2 termes extrêmes d'une progression géométrique de 4 termes est 195 ; la somme des deux termes moyens est 60. Quel est le premier terme et quelle est la raison ?

5. Quelle est la somme des termes de la progression 1, — 3, 9, — 27, jusqu'au 20e terme, inclusivement ?

6. Quelle est la somme des 12 premiers termes de la progression — 2, + 4, — 8, + 16..... ?

7. Quelle est la somme des termes jusqu'à l'infini de la progression $9, -3, +1, -\frac{1}{3}$, etc. ?

8. Un cavalier, qui fait ferrer son cheval des quatre pieds, consent à payer $^1/_{10000}$ cent. pour le premier clou, $^2/_{10000}$ cent. pour le second, $^4/_{10000}$ cent. pour le troisième, et ainsi de suite. Chaque fer a 8 clous. Combien devra le cavalier ?

9. Un mendiant va demander l'hospitalité à un avare, qui ne veut pas la lui accorder gratuitement. Le mendiant lui fait alors cette proposition : Je vous payerai, dit-il, 1 franc le premier jour, 2 fr. le second, 3 fr. le troisième, etc., et vous me donnerez $^1/_{1000}$ cent. le premier jour, $^2/_{1000}$ cent. le second, $^4/_{1000}$ cent. le troisième, et ainsi de suite. L'avare trouvant la proposition originale et y voyant une bonne affaire, consent à cet arrangement pour 30 jours. Réglez le compte à la fin de ce temps.

10. L'écrivain arabe Asaphad raconte qu'un monarque de l'Inde nommé Scheran, admirateur passionné du jeu d'échecs,

dit à l'inventeur Sessa de lui demander tout ce qu'il voudrait pour sa récompense. Celui-ci répondit : « Que votre majesté daigne me donner 1 grain de blé pour la première case de l'échiquier, 2 pour la seconde, 4 pour la troisième, et ainsi de suite jusqu'à la 64e case. » — 1° Combien le monarque devra-t-il donner de grains de blé ? 2° Sachant que 2 100 000 grains font 1 hectolitre, que vaudrait de nos jours la récompense demandée, si le blé se vend 20 fr. l'hectolitre ? 3° Quel serait le côté du cube d'or massif qui représenterait cette somme, l'or pur valant 3434 fr. 40 le kilogr. et le décimètre cube d'or pesant 19kg258 ?

CHAPITRE IX

INTÉRÊTS COMPOSÉS ; ANNUITÉS ; AMORTISSEMENT.

1. Intérêts composés.

Dans les calculs d'intérêts composés, les logarithmes suivants sont d'un fréquent usage. On les prendra avec le nombre de décimales exigé par la question. La caractéristique est omise.

Nombres.	Logarithmes.	Nombres.	Logarithmes.
1,01	00432 13737 83	1,04	01703 33392 99
1,015	00646 60422 49	1,0425	01807 60636 46
1,02	00860 01717 62	1,045	01911 62904 47
1,025	01072 38653 92	1,0475	02015 40316 38
1,0275	01178 18305 48	1,05	02118 92990 70
1,03	01283 72247 05	1,0525	02222 21045 08
1,0325	01389 00603 28	1,055	02325 24596 34
1,035	01494 03497 93	1,0575	02428 03760 47
1,0375	01598 81053 84	1,06	02530 58652 65

LXV

Si l'on représente par C le capital placé aujourd'hui, par r la centième partie du taux, par n le nombre d'années du placement,

et par S le capital augmenté de ses intérêts composés, on a la formule fondamentale :

$$(I)\quad S = C(1 + r)^n$$

pour le cas où l'intérêt est capitalisé toutes les années.

Si l'intérêt était capitalisé à chaque instant, S serait donné par la formule :

$$(II)\quad S = C.e^{rn}$$

où e désigne la base des logarithmes népériens ; r et n ont le même sens que dans (I).

On demande ce que deviennent les capitaux suivants, placés à intérêts composés, en capitalisant l'intérêt chaque année.

1. 2640 fr. au 5 % pendant 8 ans.
2. 716 fr. 50 au $3\frac{1}{2}$ % pendant 20 ans.
3. 7800 fr. au $4\frac{1}{2}$ % pendant 13 ans.
4. 250 fr. au 4 % pendant 40 ans.
5. 2315 fr. au $2\frac{1}{2}$ % pendant 30 ans.
6. 800 fr. au 2 % pendant 15 ans.
7. 5240 fr. au $3\frac{1}{4}$ % pendant 60 ans.
8. 100 fr. au $4\frac{3}{4}$ % pendant 80 ans.
9. 745 fr. 20 au $5\frac{1}{4}$ % pendant 12 ans.
10. 200 fr. au 1 % pendant 100 ans.
11. 500 fr. au 5 % pendant 200 ans.
12. 1 fr. au 6 % pendant 150 ans.
13. 50 cent. au $5\frac{1}{2}$ % pendant 50 ans.
14. 20 cent. au $4\frac{1}{4}$ % pendant 70 ans.
15. 1 cent. au $5\frac{3}{4}$ % pendant 300 ans.
16. 5 cent. au $3\frac{3}{4}$ % pendant 400 ans.
17. 3000 fr. au 3 % pendant 21 ans 134 jours. [1]

[1] On calcule par la formule (I) la valeur de S au bout de 21 ans, puis on ajoute l'intérêt simple de S pour la fraction d'année. On comptera celle-ci à 360 jours.

18. 1500 fr. au $2\frac{3}{4}$ % pendant 16 ans 215 jours.

19. 800 fr. au $1\frac{1}{2}$ % pendant 91 ans 219 jours.

20. 590 fr. au $3\frac{1}{2}$ % pendant 32 ans et 4 mois.

21. 415 fr. au $4\frac{1}{2}$ % pendant 8 ans 7 ms $^1/_2$.

22. 346 fr. 30 au 4% pendant 15 ans 2 ms $^1/_3$.

23. Que deviennent 600 fr. au 5% pendant 18 ans, les intérêts étant capitalisés tous les six mois?

24. Que valent 1800 fr. au $3\frac{1}{2}$ % au bout de 9 ans, les intérêts étant capitalisés tous les trois mois (1)?

25. Que deviennent 2000 fr. au 4% au bout de 7 ans, les intérêts étant capitalisés tous les mois (1)?

26. Que valent 1600 fr. au bout de 10 ans, au 4%, les intérêts étant capitalisés : 1° tous les ans; 2° tous les six mois; 3° tous les trois mois; 4° tous les mois?

Chercher quel capital il faudrait prêter aujourd'hui à intérêts composés, pour retirer :

27. 13823 fr. 13 au bout de 13 ans; taux $4\frac{1}{2}$ %.

28. 821 fr. 14 au bout de 8 ans; taux 4%.

29. 1927 fr. 65 au bout de 10 ans; taux $3\frac{1}{4}$ %.

30. 3501 fr. 42 au bout de 13 ans; taux $2\frac{1}{2}$ %.

31. 6411 fr. 86 au bout de 20 ans; taux 2%.

32. 10 000 fr. au bout de 6 ans; taux 4%.

33. 1600 fr. au bout de 15 ans; taux $3\frac{1}{2}$ %.

34. 2000 fr. au bout de 18 ans; taux 5%.

35. Quelle est la valeur actuelle d'une somme de 2400 francs payable dans 9 ans et escomptée à intérêt composé au $4\frac{1}{2}$ %?

36. Quelle somme faudrait-il placer aujourd'hui au $4\frac{1}{4}$ % pour que, avec ses intérêts composés, capitalisés tous les 6 mois, elle valût 6000 fr. au bout de 5 ans?

---

(1) Log. 1,00875 = 0,00378 83548; log. $\frac{3,01}{3}$ = 0,00144 52409.

Calculer pendant combien de temps il faut placer, à intérêts composés :

37. 620 fr. au $2\frac{1}{2}$ % pour retirer 755 fr. 41.

38. 1800 fr. au 1% pour retirer 2426 fr. 13.

39. 2412 fr. au $4\frac{1}{2}$ % pour retirer 3914 fr. 32.

40. 900 fr. au 4% pour retirer 6395 fr. 84.

41. 1200 fr. au 4% pour retirer 1600 fr.

42. 1400 fr. au 5% pour retirer 20000 fr.

43. Combien une somme, placée à intérêts composés, mettrait-elle de temps à se doubler, 1° au 3%; 2° au $3\frac{1}{2}$ %; 3° au 4%; 4° au 5%?

Calculer à quel taux il faut prêter, à intérêts composés :

44. 1800 fr. pour retirer 12791 fr. 68 au bout de 50 ans.

45. 560 fr. pour retirer 688 fr. 38 au bout de 6 ans.

46. 918 fr. pour retirer 1757 fr. 92 au bout de 14 ans.

47. 719 fr. pour retirer 1605 fr. 15 au bout de 15 ans.

48. 2500 fr. pour retirer 3715 fr. 24 au bout de 9 ans.

49. 856 fr. 40 pour retirer 1546 fr. 75 au bout de 20 ans.

50. 1 fr. pour retirer 18 fr. 42 au bout de 50 ans.

Que deviendraient les capitaux suivants, à intérêts composés, en capitalisant l'intérêt à chaque instant?

51. 100 fr. au 9% pendant 87 ans [1].

52. 420 fr. au $4\frac{1}{2}$ % pendant 50 ans.

53. 350 fr. au $3\frac{1}{4}$ % pendant 32 ans.

54. 1 fr. au 6% pendant 150 ans.

55. 1 centime au 5% pendant 200 ans.

56. 5 fr. au 2% pendant 48 ans.

57. 1 cent. au 3% depuis le commencement le l'an 1000 à la fin de 1880.

58. 10 fr. au $4\frac{3}{4}$ % depuis le commencement de l'an 1715 à la fin de 1879.

---

[1] Voir log.*e* page 179.

LXVI

1. A la naissance d'un enfant, on place en son nom dans une caisse d'épargne, qui en paye l'intérêt composé au $4\frac{1}{2}$ %, une somme de 500 fr. Combien pourra-t-il retirer à l'âge de 21 ans?

2. Quelqu'un, qui devait payer une somme de 4520 fr. le 30 juin 1880, s'est libéré le 31 mars 1877 pour jouir de l'escompte composé de $4\frac{1}{2}$ %. Combien a-t-il livré?

3. Un usurier prête à un solliciteur dans l'embarras 1000 fr. contre un billet de 1800 fr. payable dans trois ans. Quel est le taux, intérêt composé, que paye l'emprunteur?

4. Si une caisse d'épargne paye aux dépositaires le 4% et qu'elle fasse valoir les dépôts au $4\frac{3}{4}$ %, combien gagnera-t-elle en 10 ans sur 1000 fr.? On calculera dans les deux cas l'intérêt composé.

5. La population d'une ville s'est élevée en 24 ans de 32500 à 66066 âmes. De combien pour cent a-t-elle augmenté chaque année?

6. Un tonneau renferme 140 litres de vin. On en tire 4 litres qu'on remplace par de l'eau. On répète la même opération encore 24 fois, en ayant soin de mélanger chaque fois uniformément l'eau avec le vin. Combien reste-t-il de vin dans le tonneau?

7. En 1876, la dette de la France s'élevait à 19 900 206 000 francs [1]. A quelle époque aurait-il fallu prêter un centime à intérêt composé au $4\frac{1}{2}$ % pour que le produit eût permis de rembourser intégralement cette somme à la fin de 1876?

8. Si l'on avait prêté à la naissance de Jésus-Christ 1 centime à intérêt composé au 4%, on demande quel serait le rayon de la sphère d'or qui représenterait la valeur de ce centime à la fin de 1880. Le kilogramme d'or fin vaut 3434 fr. 40, et le décimètre cube d'or pèse $19^{k},258$.

9. Si, dans le problème précédent, l'intérêt se capitalisait à chaque instant, combien, avec la sphère d'or, pourrait-on faire

(1) Ce nombre est égal à 38123×522000.

de sphères grandes comme la terre, dont le rayon moyen est de 1593 lieues kilométriques?

10. Quelle serait la réponse au problème 8 pour la fin de l'année 1900?

11. Une forêt renferme aujourd'hui 120 000 mètres cubes de bois. Combien en contenait-elle il y a 15 ans, si l'accroissement annuel est du $3\frac{1}{4}$ %?

12. Lorsque Jacob arriva en Egypte, sa famille se composait de 70 personnes; 430 ans après, les Israélites sortirent au nombre de 660 000. De combien pour cent a dû s'accroître chaque année la descendance du patriarche, si l'on admet que sur 1000 personnes, il en meurt en moyenne 25 par an? (Heis).

13. Quel est le capital qui, au bout de 8 ans, au 4%, vaut autant que 2700 fr. au 3%, au bout de 12 ans?

14. Deux capitaux, dont le second vaut 1420 fr. de plus que l'autre, sont placés, le premier au 4%, le second au 5%. Au bout de 16 ans, ils valent ensemble 211 084 fr. Quels sont ces capitaux? (Bardey).

15. Deux capitaux, dont l'un est de 393 marcs plus grand que l'autre, sont placés, le plus petit au $5\frac{1}{4}$ %, le plus grand au $3\frac{1}{4}$ %. Quels sont ces capitaux, sachant qu'au bout de 40 ans le plus petit est devenu le double de l'autre? (Bardey).

16. On prête en même temps à intérêts composés 38 000 fr. au $4\frac{1}{2}$ % et 99 398 fr. au $3\frac{1}{2}$ %. Au bout de combien de temps les deux sommes seront-elles égales? (Thoman).

17. Une maison est à vendre; *A* en offre 30 000 fr. comptant; *B* 35 000 fr. payables dans 3 ans; *C* 33 000 fr. en trois sommes égales payables au commencement de chaque année, dès aujourd'hui. Quelle est l'offre la plus avantageuse, et de combien? (Heis).

LXVII

2. Annuités; amortissement.

Si, à la fin de chaque année, en commençant dans un an, on

place pendant n années une somme b, à intérêts composés, la valeur V de toutes ces annuités et de leurs intérêts est donnée par la formule

$$V = \frac{b}{r}\left\{(1+r)^n - 1\right\}.$$

Si l'on place aujourd'hui un capital C, et que chaque année, à commencer dans un an, on ajoute b francs à ce capital, au bout de n années, la valeur de V est donnée par la formule fondamentale

$$V = C(1+r)^n + \frac{b}{r}\left\{(1+r)^n - 1\right\}$$

Il en résulte que, pour amortir en n années par une annuité b commençant dans 1 an un capital C emprunté aujourd'hui, on doit avoir :

$$C(1+r)^n = \frac{b}{r}\left\{(1+r)^n - 1\right\}.$$

La *valeur actuelle* A qu'il faudrait donner aujourd'hui pour racheter une annuité de b francs, est donnée par les formules suivantes. Si l'annuité commence :

1° Dans 1 an pour être perpétuelle : $A = \frac{b}{r}$;

2° Dans $(m+1)$ ans id. $A = \frac{b}{r(1+r)^m}$;

3° Dans 1 an pour cesser dans m ans $A = \frac{b}{r} - \frac{b}{r(1+r)^m}$

$$= \frac{b\left\{(1+r)^m - 1\right\}}{r(1+r)^m};$$

4° Dans $(m+1)$ ans et cesse p ans plus tard :

$$A = \frac{b}{r(1+r)^m} - \frac{b}{r(1+r)^{m+p}} = \frac{b\left\{(1+r)^p - 1\right\}}{r(1+r)^{m+p}}.$$

---

1. A la fin de chaque année, un père de famille verse dans une caisse d'épargne, qui lui en paye le $4\frac{1}{2}$ %, une somme de 250 fr. Quelle somme possèdera-t-il au bout de 30 ans ?

2. Un fumeur qui a commencé à fumer au moment où il accomplissait sa 17e année, dépense 1 fr. 80 par semaine. Si, re-

nonçant à cette habitude, il avait, à la fin de sa 18e année, placé au 4 %, dans une caisse d'épargne, la somme représentant sa dépense en tabac, et qu'il eût fait de même à la fin de chaque nouvelle année, combien aurait-il possédé à l'âge de 60 ans?

3. Combien aurait-il économisé, si sa dépense hebdomadaire n'avait été que de 1 fr. par semaine?

4. Au commencement de 1872, trois frères commencent à verser chacun 5 cent. tous les sept jours, à commencer le 7 janvier, dans une caisse d'épargne, qui paye le $4\frac{1}{4}$ % l'intérêt courant dès le lendemain de chaque versement. En supposant que la caisse ne capitalise les épargnes des enfants qu'à la fin de chaque année, combien possèderaient-ils ensemble à la fin de 1882 ?

5. Quelqu'un économise 40 cent. par jour, et verse, le 1er et le 16 de chaque mois, ses économies, soit chaque fois 6 fr., dans une caisse d'épargne, qui paye l'intérêt composé au $4\frac{1}{2}$ %. Les intérêts courent dès le 15 du mois pour les versements faits dans la première quinzaine, et dès le 1er inclusivement du mois suivant pour ceux qui sont faits dans la seconde quinzaine du mois. Les intérêts ne sont capitalisés qu'à la fin de décembre, chaque année. Combien possèdera le déposant au bout de 24 ans?

6. Quelle annuité faudrait-il placer au 4 % à la fin de chaque année pour qu'au moment où le quinzième versement est effectué, le déposant se trouve possesseur d'un capital de 4164 fr. 89?

7. Pendant combien d'années faudrait-il placer une annuité de 250 fr. au $4\frac{1}{2}$ % pour posséder en capital et intérêts 8195 fr. 76?

8. Un ingénieur qui, chaque année, avait prélevé 500 fr. sur ses appointements pour les placer à intérêts composés au 5 % par an, se trouve possesseur, à l'âge de 54 ans, de 34880 fr. 37. A quel âge avait-il commencé ses versements?

9. Un père de famille, âgé de 32 ans, prend, auprès d'une compagnie d'assurance sur la vie, une police qui assure à ses enfants le payement de 50000 fr. à son décès, contre une prime annuelle de 1280 fr. L'assuré meurt immédiatement après avoi effectué le 27e versement. L'intérêt étant au 4 %, la compagnie a-t-elle perdu ou gagné?

(1) On comptera toutes les années à 52 semaines exactement, ainsi que dans les problèmes 3 et 4.

10. Un négociant, qui espère pouvoir travailler encore 18 ans, place à la fin de chaque année 800 fr., à intérêts composés. Pendant combien de temps pourra-t-il, à commencer dès la fin de la 19e année, jouir d'une rente annuelle de 3000 fr. en échange du capital économisé? L'intérêt est au $4\frac{1}{4}$ %.

11. Quelle est, après le 26e versement, la valeur totale d'une annuité de 1400 fr. versée par moitiés le 30 juin et le 31 décembre, l'intérêt au 4 % étant capitalisé tous les 6 mois?

12. Quelqu'un a placé dans une banque, le 31 décembre 1874, une somme de 2800 fr. à intérêts composés au 4 %. A la fin de décembre de chacune des années suivantes, il ajoute au capital 450 fr. Combien possèdera-t-il à la fin de décembre 1887?

13. Un industriel installe dans ses ateliers des machines qui lui coûtent 16000 fr. et qui, à commencer un an après leur installation, nécessiteront une dépense annuelle de 120 fr. pour leur entretien. De quelle somme doit-il charger chaque année les frais de fabrication pour l'amortissement de ces machines, en supposant que, dans 20 ans, elles seront usées? L'intérêt composé est au 5 %.

14. Dans une ville de 800 000 âmes, où l'immigration amène chaque année 2000 personnes, la population, tant ancienne que nouvelle, s'accroît en moyenne de 2 % par an. Quelle sera la population de la ville dans 15 ans?

15. Un père meurt en laissant une fortune de 80 000 fr., qui produit le $4\frac{1}{2}$ %. Pour élever les enfants, on sera obligé de dépenser pendant 8 ans une somme annuelle de 5000 fr. Que restera-t-il de la fortune au bout de ce temps?

16. Un rentier qui possède un capital de 120 000 fr., dépense chaque année 6 800 pour son entretien. L'intérêt étant au $4\frac{1}{2}$ %, combien possèdera-t-il encore dans 20 ans?

17. Une forêt renferme 80 000 mètres cubes de bois, et s'accroît du 3 % par an. Combien peut-on couper de mètres cubes de bois chaque année pour qu'au bout de 30 ans la forêt contienne 100 000 mètres cubes?

18. Un père de famille a déposé, le 1er janvier 1854, une certaine somme dans une caisse d'épargne, qui paye le $4\frac{1}{4}$ % par an,

et capitalise les intérêts au 31 décembre. Au commencement de chaque année suivante, il ajoute 200 fr. au capital primitif. Après avoir effectué le versement du 1er janvier 1880, il se trouve possesseur d'un capital pour lequel on lui servira une rente de 2500 fr. pendant 20 ans. Quel est le capital primitif versé?

19. Quelqu'un qui espère vivre encore 50 ans, place au $4\frac{1}{2}$ % un capital de 1983 fr. 42, auquel il ajoutera chaque année 360 fr. assez longtemps pour pouvoir jouir pendant le reste de sa vie d'une rente de 2700 fr. Pendant combien de temps doit-il faire son versement annuel?

20. J'emprunte aujourd'hui une somme de 24 000 fr., et je m'engage à payer annuellement, en commençant dans un an, une annuité qui éteigne la dette en 50 ans. Quelle sera l'annuité à payer, l'intérêt étant calculé au $4\frac{1}{2}$ %?

21. J'emprunte 18 000 fr. au $4\frac{1}{2}$ %, et paye chaque année, tant pour l'intérêt que pour l'amortissement, le 10% de cette somme. Au bout de combien d'années ma dette sera-t-elle éteinte?

22. Un prodigue hérite d'une fortune de 120 000 fr. produisant en moyenne le $5\frac{1}{4}$ % par an. Il dépense, outre le produit de son travail, 9500 fr. par an. Dans combien d'années aura-t-il dépensé sa fortune?

23. Un industriel emprunte au 5% une somme de 50 000 fr., qu'il place dans une entreprise rapportant net 6 000 fr. par an. En appliquant tout le produit au payement des intérêts et au remboursement du capital, on demande dans combien d'années la dette sera éteinte?

24. Combien faudrait-il donner aujourd'hui pour racheter une annuité perpétuelle de 500 fr. qui doit commencer dans un an? L'intérêt est au 4%.

25. Un mourant lègue tout ce qu'il possède à sa ville natale, à la condition que celle-ci consacre à perpétuité une somme annuelle de 1200 fr. à l'éducation des pauvres. La ville voulant se racheter de cette obligation, verse dans un établissement de crédit une somme de 30 000 fr. qui en est jugée l'équivalent. A quel taux a-t-on compté l'intérêt?

26. Quelle est la valeur actuelle d'une annuité perpétuelle de 1200 fr. qui doit commencer dans 12 ans? L'intérêt est au $4\frac{1}{2}$ %.

27. On voudrait convertir une somme de 17 799 fr. 10 réalisable immédiatement en une annuité perpétuelle de 1500 fr. L'intérêt composé étant calculé au 4 %, dans combien d'années doit-on commencer à servir l'annuité ?

28. Une somme de 18 324 fr. 46 exigible aujourd'hui doit être convertie en une annuité perpétuelle de 2000 fr. Dans combien d'années doit-on commencer à la payer ? L'intérêt est au 5 %.

29. *A* loue pour 4 ans une maison dont le loyer annuel de 2000 fr. sera payable à la fin de chaque année. En entrant en jouissance, il voudrait se libérer de ces quatre payements. Combien doit-il livrer, l'intérêt étant au 5 % ?

30. Un testateur laisse toute sa fortune à un parent éloigné, mais à la condition que celui-ci paye, au moment de l'entrée en possession, une somme de 36 893 fr. 90 à un neveu du défunt. Le légataire ne disposant pas de cette somme convient avec le neveu de la convertir en une annuité de 30 ans commençant dans un an. L'intérêt étant au 5 %, quelle sera l'annuité à payer ?

31. On a donné aujourd'hui 5 553 fr. 06 pour racheter au 5 % une annuité de 1 200 fr. qui devait commencer dans un an. Pendant combien d'années devait se payer l'annuité ?

32. Un rentier place à fonds perdu un capital de 16 308 fr. 38 dans une maison de commerce qui s'engage à lui servir, à lui ou à ses héritiers, une rente annuelle de 1 200 fr. à commencer dans un an. L'intérêt étant fixé au 4 %, pendant combien d'années devra être servie la rente pour être l'équivalent du capital versé ?

33. Un employé âgé de 30 ans gagne par an 3 800 fr. et espère qu'il pourra travailler jusqu'à 65 ans. S'il atteint cet âge, il voudrait pouvoir se reposer en jouissant du même revenu annuel. Quelle somme doit-il prélever chaque année sur ses recettes et verser au $4\frac{1}{4}$ dans une caisse de rentes pour que celle-ci lui fasse, dès la fin de sa 65e année, à lui ou à ses héritiers, une rente de 3 800 fr. pendant 20 ans ?

34. Un rente annuelle de 2800 fr., qui doit être payée encore pendant 14 ans, doit être transformée en une autre rente annuelle payable pendant 20 ans. A combien s'élèvera la dernière, l'intérêt étant compté au $4\frac{1}{2}$ % ?

35. On veut transformer une rente de 3 400 fr., payable tous les ans et devant durer encore 12 ans, en une rente semestrielle

payable pendant 16 ans. Quel doit être le montant de la rente semestrielle, l'intérêt étant calculé pour chacune au $4\frac{1}{2}$ °/₀ l'an?

36. Combien faudrait-il donner aujourd'hui pour racheter au 5°/₀ une annuité de 9 500 fr. qui doit commencer dans 10 ans et durer 40 ans?

37. Pour racheter au 6°/₀ une annuité qui devait commencer dans 25 ans et durer 50 ans, on a donné 19 464 fr. 20. A combien s'élevait l'annuité?

38. *A* place à intérêts composés 100 000 fr., sur lesquels il prélève chaque année 7000 fr.; *B* place 10 000 fr., et ajoute chaque année 700 fr. au capital. Dans combien d'années les capitaux seront-ils égaux, et à combien s'élèveront-ils? L'intérêt est au $4\frac{5}{8}$ °/₀.

39. Une rente annuelle de 600 fr. payable à la fin de l'année pendant 20 ans, doit être transformée en une autre, servie pendant 25 ans, et payable à la fin de chaque trimestre. Quel sera le montant de la nouvelle rente, l'intérêt étant calculé pour toutes les deux à 4°/₀ l'an? (Heis).

---

40. On paye 10 200 fr. pour racheter une annuité perpétuelle de 459 fr. qui commence dans 1 an. A quel taux compte-t-on l'intérêt?

41. La rente 3 °/₀ étant à 81,50, quel est le taux de l'intérêt?

42. On a donné 503 370 fr. 50 pour le rachat d'une annuité de 30 000 fr. qui doit commencer dans 1 an et durer 30 ans. Quel est le taux de l'intérêt?

43. Si l'on achète au prix de 263 439 fr. 10 une annuité de 29 000 fr. d'une durée de 11 ans, quel est le taux du prix d'achat?

44. La valeur actuelle de 48 annuités de 1 600 fr. est de 31 442 fr. 10. A quel taux calcule-t-on le prix de rachat?

45. Une annuité de 4 200 fr. qui commencera dans 1 an et cessera dans 56 ans a été rachetée pour une somme de 102 520 francs 75 c. A quel taux a-t-on calculé l'intérêt?

CHAPITRE X

FRACTIONS CONTINUES [1].

On appelle *fraction continue* toute expression de la forme :

$$\text{(I)}\quad a \pm \cfrac{b}{c \pm \cfrac{d}{e \pm \text{etc.}}} \qquad\qquad \text{(II)}\quad a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \text{etc.}}}$$

Les exercices suivants se rapportent à la forme (II) uniquement. Les quantités a, b, c sont supposées des nombres entiers positifs. On écrit aussi ces fractions, pour abréger :

$$a + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \text{ etc.}$$

Les quantités a, b, c, etc. sont appelées *quotients incomplets* ou simplement *quotients*. Les *quotients complets* se composent d'un quotient incomplet plus tout ce qui y est joint par le signe $+$.

Les fractions $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{d}$ sont appelées *fractions partielles* ou *fractions intégrantes*.

Si l'on prend successivement le premier terme, puis les deux premiers, puis les trois premiers, et qu'on réduise les diverses expressions ainsi obtenues en fractions ordinaires, celles-ci portent le nom de *réduites* ou *fractions convergentes*.

Comment transforme-t-on une expression fractionnaire en fraction continue?

[1] C'est à lord Brouncker, chancelier d'Angleterre, qu'on doit l'invention des fractions continues (1665), auxquelles il fut conduit en cherchant à transformer les expressions indéfinies qu'avait données Wallis pour évaluer l'aire du cercle. Huygens, Daniel Bernouilli, Euler, Lagrange, Gauss, Wronski, etc., en ont complété la théorie.

D'après quelle loi se forment les réduites?

Quelle est leur valeur par rapport à la fraction continue?

A quoi est égale la différence entre deux réduites consécutives?

Quelle est la limite de l'erreur qu'on commet en prenant une réduite pour la valeur de la fraction continue?

LXVIII

Transformer en fractions continues :

1. $\frac{103}{21}$. **2.** $\frac{37}{11}$. **3.** $\frac{89}{12}$. **4.** $\frac{269}{13}$. **5.** $\frac{67}{167}$.

6. $\frac{103}{643}$. **7.** $\frac{149}{809}$. **8.** $\frac{379}{53}$. **9.** $\frac{484}{457}$. **10.** $\frac{368}{103}$.

11. $\frac{167}{907}$. **12.** $\frac{311}{991}$. **13.** $\frac{857}{181}$. **14.** $\frac{173}{613}$. **15.** $\frac{256}{113}$.

16. $\frac{800}{379}$. **17.** $\frac{215}{97}$. **18.** $\frac{2}{101}$. **19.** 6,153. **20.** 3,917.

21. 9,749. **22.** 2,712712. **23.** 5,07. **24.** 0,561.

25. 0,0241. **26.** 0,7373... **27.** 0,912912... **28.** 0,00310031...

---

29. $\frac{15a^2+1}{15a^3+6a}$. **30.** $\frac{63m^5+1}{315m^6+9m^3+5m}$.

31. $\frac{x^3+x^2+x}{x^3+2x^2+x+1}$. **32.** $\frac{24x^3+6x}{24x^4+18x^2+1}$.

33. $\frac{x^{10}+x^7+x^5+x^3+1}{x^9+x^4+x^2}$.

34. $\frac{a^3x^9+x^4+a^2x^2}{a^6x^{10}+ax^7+a^3x^5+a^5x^3+1}$.

35. $\frac{16a^{10}+4a^8+4a^7+4a^5+1}{8a^9+2a^7+2a^4}$.

36. $\frac{6m^6+3m^5+5m^4+3m^3+m^2+m}{6m^5+5m^3+2m^2+1}$.

37. $\frac{x^4+10x^3+37x^2+60x+39}{x^3+9x^2+27x+26}$.

Transformer les fractions continues suivantes en fractions ordinaires :

38. $\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{7}}}$. **39.** $\dfrac{1}{6+\dfrac{1}{4+\dfrac{1}{2}}}$. **40.** $\dfrac{1}{8+\dfrac{1}{7+\dfrac{1}{3}}}$.

41. $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}}}}$. **42.** $2+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{5+\dfrac{1}{7}}}$.

43. $4+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{4+\dfrac{1}{6}}}$. **44.** $3+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{4+\dfrac{1}{8}}}$.

45. $7+\dfrac{1}{6+\dfrac{1}{5+\dfrac{1}{4}}}$. **46.** $1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}}}}$.

47. $5+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{4+\dfrac{1}{5}}}}}$. **48.** $\dfrac{1}{13+\dfrac{1}{11+\dfrac{1}{9+\dfrac{1}{7+\dfrac{1}{5}}}}}$.

49. $\dfrac{1}{5+\dfrac{1}{7+\dfrac{1}{9+\dfrac{1}{11+\dfrac{1}{13}}}}}$.

Convertir les fractions continues suivantes en fractions ordinaires, puis transformer celles-ci en fractions continues de la forme (II).

50. $\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{6}}}}}$.

51. $\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{8-\cfrac{1}{10}}}}}$.

52. $\cfrac{1}{2+\cfrac{3}{4+\cfrac{5}{6+\cfrac{7}{8}}}}$.

53. $\cfrac{3}{5+\cfrac{6}{25+\cfrac{9}{7+\cfrac{12}{13}}}}$.

54. $\cfrac{2}{3-\cfrac{4}{5+\cfrac{6}{7-\cfrac{8}{9}}}}$.

55. $\cfrac{1}{1-\cfrac{2}{3+\cfrac{4}{5-\cfrac{1}{2+\cfrac{3}{4}}}}}$.

56. $\frac{2}{1} - \frac{1}{2} - \frac{3}{4} - \frac{5}{6} + \frac{7}{8} - \frac{1}{3}$.

LXIX

Formez les réduites des fractions continues suivantes :

1. $\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{6}}}}}$.

2. $\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5}}}}}$.

3. $\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{4}}}}}$.

4. $\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{16+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4}}}}}$.

5. $\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{11}}}}}}$.

6. $\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3}}}}}}$.

7. $\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3}}}}}}$.

8. $\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{6}}}}}}$.

9. $5+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$.

10. $2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}}}}}}}$.

11. $4+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{3}}}}}}$.

Trouver les valeurs approchées des quantités suivantes :

12. $\frac{3845}{997}$. 13. $\frac{977}{4636}$. 14. $\frac{15600}{839}$. 15. $\frac{2703}{2219}$.

16. $\frac{3791}{2951}$. 17. $\frac{13733}{18983}$. 18. $\frac{36661}{43523}$. 19. $\frac{20467}{44341}$.

20. $\frac{3,1099}{36,391}$. 21. $\frac{48,427}{45,607}$. 22. 3,1415926.

23. 2,718 281 83. 24. 0,434 294 5. 25. $\frac{418\frac{5}{6}}{319,2}$.

Transformez les racines carrées suivantes en fractions continues :

26. $\sqrt{3}$. 27. $\sqrt{7}$. 28. $\sqrt{11}$. 29. $\sqrt{15}$. 30. $\sqrt{17}$.

31. $\sqrt{27}$. 32. $\sqrt{37}$. 33. $\sqrt{46}$. 34. $\sqrt{51}$. 35. $\sqrt{39}$.

36. $\sqrt{80}$. 37. $\sqrt{89}$. 38. $\sqrt{310}$. 39. $\sqrt{412}$. 40. $7\sqrt{6}$.

41. $2\sqrt{19}$. 42. $5\sqrt{\frac{1}{2}}$. 43. $7\sqrt{\frac{3}{4}}$. 44. $8\sqrt{0,26}$.

45. $\dfrac{1+\sqrt{8}}{2}$. 46. $\dfrac{3+\sqrt{13}}{5}$. 47. $\dfrac{-3+\sqrt{7}}{6}$.

Chercher la valeur des radicaux qui équivalent aux fractions continues périodiques suivantes :

48. $\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{5}\cdots}}$ 49. $\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4}\cdots}}}$ 50. $\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3}\cdots}}$

51. $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}\cdots}}}$ 52. $\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}\cdots}}$

53. $\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}\cdots}}}$ 54. $\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3}\cdots}}}$

LXX

1. Le yard anglais vaut 0,914 383 mètre. Quels sont les rapports approchés du mètre au yard ?

2. Le fathom anglais vaut 1,828 767 mètre. Quels sont les rapports approchés du fathom au mètre ?

3. Quels rapports simples expriment la valeur de la pièce d'or de 20 dollars, qui pèse 33,437 grammes, par rapport à la pièce de 20 fr., qui pèse 6,451 61 gr., les deux pièces ayant même titre ?

4. Quels sont les rapports simples de la lieue de 25 au degré et du kilomètre? La lieue vaut 4444m,44...

5. Le rayon équatorial de la terre a 6 377 398 mètres; le rayon aboutissant aux pôles a 6 356 080 mètres. Quels sont les rapports simples du diamètre équatorial au diamètre polaire?

6. La durée de l'année tropique, dont le calendrier doit se rapprocher le plus possible, est de 365,242 264 jours solaires moyens. Quels sont les rapports simples de cette année avec l'année civile de 365 jours?

7. Après combien d'années de 365 jours solaires moyens faut-il ajouter un ou plusieurs jours à l'année?

CHAPITRE XI

ÉQUATIONS EXPONENTIELLES.

Les équations exponentielles sont de la forme

$$a^x = b \qquad a^{(px^m + qx^n + \dots + s)} = b.$$

où a et b, ainsi que p, q et s sont des nombres positifs connus, x l'inconnue à déterminer.

Pour que l'exposant de a soit commensurable, il faut:

1° Si a ne renferme que des facteurs premiers élevés à la première puissance, que b soit une puissance entière exacte de a.

2° Ou que a et b soient composés des mêmes facteurs premiers affectés respectivement d'exposants qui forment des rapports égaux.

3° Ou que a et b soient entiers et ne renferment qu'un seul et même facteur premier.

LXXI

Résoudre les équations suivantes:

1. $2^x = 1\,024$. **2.** $3^x = 19\,683$. **3.** $7^x = 2\,401$.

4. $9^x = 59\,049$. **5.** $11^x = 14\,641$. **6.** $6^x = 279\,936$.

7. $1{,}5^x = 3{,}375$. **8.** $0{,}13^x = 0{,}000\,285\,61$.

9. $10\,000^x = 10$. **10.** $78\,125^x = 5$. **11.** $65\,536^x = 16$.

12. $262\,144^x = 64$. **13.** $59\,049^x = 243$.

14. $117\,649^x = 49$. **15.** $177\,147^x = 81$.

16. $46\,656^x = 216$. **17.** $38\,416^x = 14$. **18.** $72^x = 5184$.

19. $45^x = 91\,125$. **20.** $3600^x = 216\,000$.

21. $12^x = 20\,736$. **22.** $63\,504^x = 252$.

23. $3\,375^x = 15$. **24.** $2^x = \frac{1}{256}$. **25.** $7^x = \frac{1}{117\,649}$.

26. $4^x = \frac{1}{16\,384}$. **27.** $11^x = \frac{1}{161\,051}$.

28. $6^x = \frac{1}{46\,656}$. **29.** $27^x = \frac{1}{19\,683}$.

---

30. $2^x = 5$. **31.** $7^x = 9$. **32.** $8^x = 11$. **33.** $6^x = 12$.

34. $11^x = 27$. **35.** $10^x = 35$. **36.** $9^x = 1{,}5$.

37. $1{,}5^x = 9$. **38.** $13^x = 561$. **39.** $(\frac{5}{7})^x = 9$.

40. $(5\frac{1}{4})^x = 15{,}19$. **41.** $41^x = 89$. **42.** $56^x = 3$.

43. $91^x = 2{,}71$. **44.** $17^x = 3{,}55..$ **45.** $14^x = 0{,}3838..$

46. $11^x = \frac{5}{2}$. **47.** $20^x = \frac{13}{4}$. **48.** $(7\frac{1}{2})^x = \frac{17}{3}$.

49. $37^{2x} = 511$. **50.** $2^{4x} = 6{,}3214$. **51.** $29^{3x} = 463$.

52. $(\frac{1}{4})^x = 36$. **53.** $8^x = \frac{3}{4}$. **54.** $3^x = \sqrt{7}$.

55. $(2{,}9)^x = \sqrt{11}$. **56.** $(\frac{2}{8})^x = 2\sqrt{2}$. **57.** $(\frac{1}{6})^x = 4\sqrt{3}$.

58. $(\sqrt{5})^x = 14$. **59.** $(\sqrt{15})^x = 18$. **60.** $(\sqrt[3]{5})^x = 16$.

61. $(\sqrt[7]{14})^x = 26$. **62.** $31^{\frac{1}{x}} = 4$. **63.** $19^{\frac{3}{x}} = 6$.

64. $8^{\frac{5}{x}} = 2$. **65.** $(7{,}5)^{\frac{8}{x}} = \sqrt{17}$. **66.** $6^{-\frac{3}{x}} = 35$.

$2^{-\frac{5}{x}} = 100$. **68.** $4^{-\frac{9}{x}} = 4096$. **69.** $3^{-\frac{1}{x}} = 7$.

---

70. $48^{2^x} = 110\,592.$ **71.** $7^{3^x} = 117\,649.$

72. $9^{5^x} = 311\,921.$ **73.** $2^{8^x} = 128.$ **74.** $5^{7^x} = 425.$

75. $15^{3^{2x}} = 17\,515.$ **76.** $5^x \times 3^{2x} = 461.$

77. $2^{3x} \times 7^{5x} = 19\,142.$ **78.** $4^{2x} \times 3^{-5x} = 0{,}0035032.$

79. $9^{3x} = 10\,845{,}73 \times 7^x.$ **80.** $10^{9x} = 8^{4x} \times 1{,}19544.$

81. $(1{,}2)^{\frac{1}{x}} = 3^{\frac{1}{x}} \times 25.$ **82.** $108^{(x+1)} = 362.$

83. $41^{(2x-3)} = 68{,}9\,562.$ **84.** $9^{(x^2-x)} = 531\,441.$

85. $34^{(x^2+5x)} = 39304^2.$ **86.** $53^{(x^2+x-2)} = 27\,155{,}15^7.$

87. $161^{(x^2-4x+3)} = 875{,}86^6.$ **88** (¹). $e^x = 25.$

89. $e^{-x} = 37.$ **90.** $e^{\frac{4}{x}} = 57.$ **91.** $e^x = \frac{1}{20}.$

92. $e^{(x+1)} = 22.$ **93.** $e^{(x^2-x)} = 404.$

94. $e^{(x^2-x+2)} = 1097^2.$ **95.** $e^{(x^2+3x-1)} = \sqrt{404}.$

96. $3^{x^2-1} \times 3^{2x-4} \times 3^5 = 6561.$

97. $4^{x-1} + 4^{x-2} + 4^{x-3} + 4^{x-4} + 4^{x-5} = 341.$

98. $4^{3x} \times 5^{2x} = 2\,560\,000.$

99. $\left(\frac{1}{117}\right)^{(3x^3-7x^2-7x)} = 1\,601\,613.$

100. $(2{,}3)^{(6x^4-35x^3+62x^2-35x)} = \frac{100\,000}{14\,803\,589}.$

101. $\left(\frac{1}{11}\right)^{(x^4+8x^3+14x^2-8x-21)} = 1\,771\,561.$

102. $(13)^{\frac{5x^3+2x+1}{1-4x^2+x^3}} = 371\,293.$

103. $(0{,}7)^{\frac{8(3x^5-2x^3+4x^2-3)}{2x^2-x-3x^4-8}} = 17{,}3467^x.$

Résoudre les exemples suivants par le moyen des fractions continues.

104. $3^x = 12.$ **105.** $5^x = 79.$ **106.** $2^x = 456.$

(¹) Dans les exemples 88 à 95, *e* désigne la base des log. naturels.

107. $7^x = 515$. **108.** $3^x = 85$. **109.** $8^x = 129$.

110. $9^x = 420$. **111.** $(\frac{2}{3})^x = \frac{7}{218}$. **112.** $(\frac{1}{2})^x = \frac{12}{17}$.

113. $10^x = 1025$. **114.** $7^{(x^2-x)} = 292$.

115. $(1,02)^{(x^2-2x)} = 1,07901$.

CHAPITRE XII

ÉQUATIONS INDÉTERMINÉES.

I. ÉQUATIONS INDÉTERMINÉES DU PREMIER DEGRÉ [1].

LXXII

Un problème est indéterminé quand il fournit moins d'équations qu'il n'y a d'inconnues.

Pour que l'équation $ax + by = c$ soit soluble en nombres entiers, il faut qu'après la suppression des facteurs qui pourraient être communs à a, b et c, a et b soient premiers entre eux.

[1] On donne le nom de *problèmes de Diophante* aux questions d'analyse indéterminée, faisant ainsi remonter au mathématicien grec (360 ans ap. J.-C.) les origines de l'analyse indéterminée. Il est vrai que, dans ce qui reste des écrits de Diophante, se trouvent de nombreuses questions de ce genre, résolues avec beaucoup d'habileté et de sagacité, par des artifices de calcul très variés, mais sans lien apparent. Chez les Hindous, au contraire, on trouve des solutions générales des équations indéterminées du premier et du second degré. Ce sujet se trouve complétement exposé dans les écrits de Bhascara (né en 1154 de J.-C.) et de Brahmegupta (né en 598 de J.-C.). On peut lire en particulier les chapitres 5 et 6 du *Bija-Ganita* de Bhascara. Bramegupta cite sur ces matières, un mathématicien plus ancien, Aryabhatta, né en 475. La solution indienne de l'équation du premier degré est au fond la même que celle d'Euler, fondée sur l'emploi des fractions continues. Celle de l'équation $ay^2 + s = x^2$ est identique à la solution retrouvée en 1769 par Lagrange. — S'il faut en croire les Chinois et leur chronologie, Tsin-Kiu-Tschaou publia sur l'arithmétique un livre qui aurait été écrit 2600 av. J.-C., et contenant des exemples d'analyse indéterminée, dont quelques-uns, par parenthèse, se retrouvent dans le *Lilâvati*.

Soit a positif; si b est aussi positif, le nombre des solutions entières positives est limité. — Toutes les fois que b est négatif, quel que soit le signe de c, les solutions entières positives sont en nombre illimité.

Trouver les solutions entières et positives des équations suivantes :

1. $x + y = 12$. **2.** $2x + y = 15$. **3.** $3x + y = 18$.

4. $5x + y = 15$. **5.** $7x + y = 23$. **6.** $4x + y = 23$.

7. $x + 2y = 10$. **8.** $2x + 3y = 15$. **9.** $3x + 4y = 19$.

10. $5x + 6y = 30$. **11.** $5x + 6y = 32$.

12. $2x + 7y = 29$. **13.** $5x + 9y = 287$.

14. $2x + 3y = 9$. **15.** $4x + 29y = 150$.

16. $6x + 31y = 147$. **17.** $4x + 9y = 53$.

18. $3x + 7y = 163$. **19.** $7x + 2y = 59$.

20. $8x + 3y = 76$. **21.** $11x + 2y = 83$.

22. $18x + 5y = 173$. **23.** $13x + 7y = 159$.

24. $8x + 13y = 413$. **25.** $17x + 5y = 462$.

26. $18x + 15y = 48$. **27.** $45x + 27y = 117$.

28. $56x + 91y = 945$. **29.** $121x + 44y = 286$.

30. $85x + 51y = 187$. **31.** $69x + 184y = 1173$.

32. $261x + 145y = 2407$. **33.** $259x + 74y = 4107$.

34. $649x + 413y = 6667$. **35.** $166x + 581y = 135\,290$.

36. $635x + 381y = 54\,737$. **37.** $2504x + 2817y = 157\,752$.

38. $\frac{1}{3}x + 2y = 68$. **39.** $3x + \frac{2y}{5} = 123$.

40. $\frac{3}{4}x + 5y = 92$. **41.** $\frac{1}{6}x + 2y = 81$.

42. $\frac{x}{5} + \frac{3y}{5} = 72$. **43.** $\frac{3x}{4} + \frac{y}{4} = 27$.

44. $\frac{5x}{7} + \frac{3y}{7} = 15$. **45.** $\frac{4x}{5} + \frac{2y}{5} = 18$.

46. $\frac{5x}{9} + \frac{8y}{9} = 14.$ 47. $\frac{3x}{11} + \frac{7y}{11} = 24.$

48. $\frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 28.$ 49. $\frac{3x}{2} + \frac{4y}{3} = 31.$

50. $\frac{5x}{7} + \frac{2y}{3} = 42.$ 51. $\frac{3x}{11} + \frac{2y}{7} = 29.$

52. $\frac{2x}{9} + \frac{5y}{7} = 20.$ 53. $\frac{3x}{5} + \frac{2y}{3} = 37.$

54. $\frac{3x}{4} - 23 + \frac{5y}{2} = 0.$ 55. $\frac{2x}{7} - 32 = -\frac{4y}{5}.$

56. $\frac{3x}{4} + \frac{3y}{2} = 24.$ 57. $\frac{2x}{9} + \frac{5y}{3} = 12.$

58. $\frac{x + 15y}{x - 21} = -20.$ 59. $\frac{13y - 62x}{3x - 12} = -26.$

60. $\frac{12x^2 + 3y - 70}{5 - 3x} = -4x.$

61. $\frac{10x^2 - 18xy - 19y^2 + 96y}{2x - 4y} = 5x + 3y.$

62. $0,25x + 0,6y = 8,9.$ 63. $0,7x + 0,05y = 9,5.$

64. $2,3x + 0,06y = 41,28.$ 65. $0,09x + 3,07y = 36,18.$

66. $0,77..x + 0,41y = 51,88...$ 67. $5,11..x - 412 + \frac{y}{4} = 0.$

68. $0,4x + 0,75y - 36 = 0.$

69. $0,25x - 0,6y + \frac{0,05x + 2y}{3} = -\frac{x}{3} + 12\frac{4}{5}.$

70. $-\frac{4}{5} - \frac{x}{5} + \frac{7y}{9} + 0,8x - 0,33..y - 102 = 0.$

---

71. $x - y = 6.$ 72. $2x - y = 15.$ 73. $x - 5y = 18.$

74. $2x - 3y = 7.$ 75. $5x - 8y = 41.$ 76. $4x - 11y = 38.$

77. $2x - 19y = 5.$ 78. $15x - 47y = 1.$

79. $13x - 25y = 0.$ 80. $5x - 2y = -1.$

81. $9x - 4y = -5.$ **82.** $51x - 101y = 1.$

83. $16x - 24y = 72.$ **84.** $21x - 119y = 161.$

85. $102x - 153y = 204.$ **86.** $64 - 12x = -16y.$

87. $5x - 17 = 14x - 16y + 2.$

88. $11 + 13y - 5x = 4 + y + 2x.$

89. $15y - 3x + 13 = 8x - 24 - 23y.$

90. $10x + 81 = 23x - 15y - 119.$

91. $\frac{5x}{2} - 14 + 13y - \frac{17x}{2} - 1 = 0.$

92. $\frac{8x}{3} - \frac{4y}{7} + 3\frac{2}{5} - \frac{10y}{7} + \frac{x}{3} + \frac{23}{5} = 0.$

93. $\frac{15 - 2y}{7} = \frac{8 - 5x}{3}.$

94. $\frac{14x - 8y + 1}{5} = \frac{3 - 2x - 5y}{6}.$

95. $\frac{3 - 4y}{11} = \frac{7 - 5x}{7}.$ **96.** $\frac{3x - 14}{2} = \frac{2y - \frac{1}{2}}{5}.$

97. $\frac{4x - 5}{2} = \frac{2\frac{1}{2}y - 3}{3}.$ **98.** $\frac{9x - 2\frac{3}{4}y - 1}{7} = \frac{3x - y + 1}{4}.$

99. $\frac{5x + 3\frac{1}{3} + 2y}{3} = \frac{x + 6\frac{1}{3}y + 11}{6}.$

100. $\frac{1}{4}(35x - 23) - 2{,}25y = 0.$

101. $5{,}22..x - 1{,}33..y = 3{,}22...$

102. $5(7{,}4x - 2\frac{4}{5}y) = 23.$ **103.** $2\frac{1}{7}x - 2y = \frac{513}{7}.$

104. $5x - 12{,}75y - 105 = -\frac{1}{4}.$

105. $0{,}4545..x + 0{,}3636..y - 8\frac{1}{4} = \frac{0{,}3x + 3y}{2} + 3\frac{1}{2}.$

106. $-2\frac{1}{6} + 0{,}755..x + 4{,}5y + 10 = \frac{5\frac{4}{15}x + 0{,}25y}{3} + 111.$

Cherchez les solutions entières et *négatives* des équations suivantes :

107. $3x + 8y = -56.$ **108.** $5x - 17y = 41.$

109. $-9x + 4y = 67.$ **110.** $-7x + 17y = 87.$

111. $-13x - 19y = 97.$ **112.** $-\frac{3}{4}x + \frac{5}{6}y = -47\frac{1}{3}.$

113. $15x + 7y = -78.$ **114.** $-\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = \frac{45}{6}.$

115. $0{,}32x - \frac{5y}{6} = -56{,}4.$

116. $-0{,}5x + 0{,}3232..y = 72{,}77...$

117. $25{,}7 - 5x = -0{,}18y.$ **118.** $0{,}2 + 3{,}4x - 5{,}6 = 7{,}8y.$

119. $0{,}02x - 3{,}4 + \frac{y}{7} = 0{,}7x - 0{,}6y + \frac{4}{5}.$

120. $0{,}05y + \frac{3{,}2 - 0{,}4y}{9} = -1 + \frac{2(0{,}1x - 0{,}3y)}{5}.$

121. $\frac{0{,}4y - 7x}{5} + 6 = 8 - \frac{0{,}33..y + 2x}{9}.$

122. $3 - \frac{4x + 7y}{9} = 15 + \frac{2y + x}{3}.$

Trouvez les solutions entières, tant positives que négatives, des équations suivantes, et indiquez s'il y a peut-être des équations insolubles en nombres entiers.

123. $3x - y = -27.$ **124.** $5x + 3y = 42.$

125. $\frac{2x + 3y}{9} + 1 = -\frac{3x + 2y}{7} - 8.$

126. $7x + 11y = 361.$ **127.** $91x + 67y = 519.$

128. $18x = 315 - 63y.$ **129.** $0{,}3x + 1{,}2y = \frac{25}{7}.$

130. $0{,}4242..x - 35{,}2 = -3{,}44..y.$ **131.** $\frac{x}{2} - \frac{3y}{4} = \frac{54}{7}.$

132. $\frac{2x + 6y}{4} + 3 = -\frac{3x + 2y}{2} + 5.$

133. $0{,}2y - 3\frac{1}{7} = \frac{2x - 0{,}5y}{6} + 3.$

134. $0 = 45 + 2{,}5y - \frac{5}{6}x.$

Cherchez les solutions entières et positives des équations suivantes :

135. $x + y + z = 7.$

136. $2x + 3y + z = 17.$

137. $5x + 2y + 3z = 32.$

138. $2x + 5y - z = 56.$

139. $x + 5y + 3z = 29.$

140. $7x + 4y + 9z = 89.$

141. $9x - 2y + 13z = 95.$

142. $8x + 13y + 17z = 89.$

143. $5x + 7y + 9z = 102.$

144. $10x + 13y + 8z = 143.$

145. $3x - 18y + 5z = -47.$

146. $13x - 7y - 5z = 2.$

147. $3x + y + z = 14.$
$5x + 3y + z = 28.$

148. $4x + y + 3z = 30.$
$7x + y + 6z = 51.$

149. $x + 12y + 13z = 78.$
$x + 7y + 8z = 48.$

150. $x + 2y + 3z = 20.$
$3x + 5y + 4z = 37.$

151. $4x + 3y + 5z = 41$
$2x + 5y + z = 35.$

152. $5x + y + 7z = 39$
$2x + 4y + 9z = 63.$

153. $x + 2y + 3z = 17$
$4x + 5y + 7z = 52.$

154. $2x + y - 3z = 6$
$5x - 3y + 7z = 110.$

155. $x + 2y - z = 7$
$2y - 3z + u = 7$
$4z + x - u = 2.$

156. $x + 2y + 3z = 17$
$3y + z - 2u = 4$
$2x + 3z + u = 17.$

157. $x + y + z = 16$
$y - z + u = 1$
$x + y - u = 9.$

158. $2x - y + 5u = 18$
$3y + z + 2u = 16$
$x + 2y - 2z = 4.$

LXXIII

Problèmes donnant des équations indéterminées du premier degré.

1. Trouver deux nombres qui, multipliés respectivement par 7 et 17, donnent des produits dont la somme égale 1135.

2. Si l'on multiplie deux nombres respectivement par 8 et par 17, la différence des produits est 10. Quels sont ces nombres ?

3. Si l'on multiplie deux nombres respectivement par 7 et 15, le premier produit excède de 12 le second. Trouver les nombres.

4. Trouver deux nombres dont le premier soit de 6 plus petit que l'autre, et qui soient multiples respectivement de 4 et de 5.

5. Diviser 89 en deux parties dont l'une soit divisible par 3 et l'autre par 8.

6. Diviser 316 en deux parties dont l'une soit un multiple de 11 et l'autre un multiple de 13.

7. Partager 118 en deux parties dont la première soit divisible par 7 et la seconde par 11.

8. Quel est le plus petit nombre qui, divisé par 5 et par 7, donne chaque fois 4 pour reste ?

9. Un nombre divisé par 7 donne 1 pour reste, et divisé par 8, il donne 7 pour reste. Quel est ce nombre ?

10. La différence de deux nombres est 151. Le premier divisé par 8 donne 5 pour reste, et il faudrait ajouter 4 au second pour qu'il fût divisible par 11. Quels sont ces nombres ?

11. Partager 352 en deux parties telles que la première diminuée de 2 soit divisible par 7, et la seconde augmentée de 5 soit multiple de 9.

12. Combien y a-t-il de fractions ayant pour dénominateur l'une 24, l'autre 16, et dont la somme égale $\frac{19}{24}$?

13. Trouver deux fractions dont les dénominateurs soient 11 et 13, et dont la différence soit $\frac{82}{143}$.

14. Comment peut-on payer une somme de 87 fr. en ne donnant que des pièces de 5 fr. et de 2 fr. ?

15 On achète des oies à 5 fr. pièce, et des poulets à 3 fr. On dépense en tout 114 fr. Combien a-t-on eu d'oies et de poulets ?

16. Un cuisinier dépense au marché 72 fr. pour acheter des lièvres à fr. 5,80 et des perdrix à fr. 1,40. Combien a-t-il rapporté de pièces de chaque espèce de gibier ?

17. Le diamètre d'une pièce de 5 fr. d'argent est de 37^{mm} ; celui d'une pièce de 1 fr. de 23^{mm}. De combien de manières peut-

on obtenir la longueur du mètre en alignant des pièces de 5 fr. et de 1 fr.?

18. Un souverain vaut 25 fr. 21. Comment pourrait-on acquitter, avec des souverains, une dette de 317 fr. à une personne qui n'a pour rendre que des pièces de 20 centimes?

19. Le marc d'empire vaut 1 fr. 23. Comment pourrait-on, avec des pièces de 1 marc, acquitter une dette de 1000 fr. à un créancier qui ne peut rendre que des pièces de 50 cent.?

20. Comment peut-on peser 1 kilogramme de marchandise avec des poids de 30 grammes et de $2\frac{1}{2}$ grammes?

21. Peut-on obtenir la longueur du décimètre en alignant des pièces de 1 fr. qui ont un diamètre de 23mm, et des pièces de 50 cent. qui ont 18mm, et de combien de manières peut-on obtenir cette longueur? — Quelle est la somme la plus faible avec laquelle on pourrait obtenir le décimètre?

22. Une société où se trouvent des enfants a fait une excursion qui a coûté pour chaque grande personne 7 fr. 15 et pour chaque enfant 3 fr. 10. La dépense totale a été de 97 fr. 25. Combien y avait-il de grandes personnes et combien d'enfants?

23. Une corbeille contient plus de 300 et moins de 400 poires. Si on les distribuait à des enfants à raison de 13 poires à chacun, il en resterait 9, mais il resterait 4 poires si on en donnait 15 à chaque enfant. Combien de poires contient la corbeille?

24. On achète de l'indienne à 2 fr. 50 le mètre et de l'orléans à 3 fr. 50; en tout on dépense 106 fr. Combien a-t-on acheté de mètres de chaque étoffe?

25. Deux frères ont travaillé, le premier 18 jours, le second 5 jours de moins, et ils ont reçu ensemble 142 fr. Combien chacun gagnait-il par jour?

26. Une femme vend au marché des pêches à 15 c. pièce et des pommes à 59 c. la douzaine, et retire en tout de sa vente 10 fr. 87. Combien a-t-elle vendu de pêches et combien de pommes?

27. Quel est ton âge? demandait quelqu'un à son ami, le jour anniversaire de celui-ci, le 5 février 1880. Je suis né dans ce siècle, reprit l'ami, et si l'on écrit l'année de ma naissance,

puis qu'on additionne les quatre chiffres, la somme égale juste l'âge que j'ai aujourd'hui. Quel est l'âge demandé?

28. L'âge de mon grand père, en 1808, était égal à la somme des 4 chiffres de l'année de sa naissance. Quel âge avait-il alors, et en quelle année était-il né?

---

29. Une domestique reçoit 37 fr. pour acheter du café à 3 fr. le kilog., du thé à fr. 5 et du sucre à 80 cent. Combien aura-t-elle de kilogrammes de chaque marchandise?

30. Quels nombres divisés par 2, 3, 7 donnent respectivement pour restes 1, 2, 5?

31. Quels nombres divisés par 7, 8, 9 donnent respectivement pour restes 6, 7, 8?

32. Un marchand de volailles vend une première fois 15 dindes, 14 chapons et 13 poulets, et retire 200 fr. Quelques jours plus tard il fait, aux mêmes prix, une seconde livraison de 7 dindes, 11 chapons et 16 poulets pour laquelle il retire 141 fr. Quel est le prix de chaque volaille?

33. Partager 111 en trois parties, dont la première soit divisible par 2, la seconde par 5, la troisième par 7, et telles en outre que le triple de la première partie, le double de la seconde et le quintuple de la troisième valent en somme 400.

LXXIV

II. ÉQUATIONS INDÉTERMINÉES DU SECOND DEGRÉ.

Résoudre en nombres entiers les équations suivantes :

1. $xy + x - y - 43 = 0$. **2.** $8xy + 3x - 2y = 202$.

3. $2xy - x = 15y + 17$. **4.** $5x + 7y = 4xy - 71$.

5. $4y - 2x = 7xy - 134$. **6.** $2xy + 3x = 5y + 16$.

7. $2x^2 + 22 = y(3x + 1)$. **8.** $4xy - x^2 = 7y + 26$.

9. $5xy + 2y^2 = 7x + 82$. **10.** $(y + 1)^2 = (y + 5)x$.

11. $x^2 + 2x - 20 = (2y - x)^2$.

12. $3y^2 + 4x^2 - 90 = (y - 2x)^2$.

Trouver les valeurs de x qui font des polynomes suivants des carrés parfaits.

13. $x + 7$. **14.** $x - 3$. **15.** $x + \frac{2}{3}$. **16.** $x - \frac{4}{5}$.

17. $x + 0{,}3$. **18.** $4x^2 + 5x - 3$. **19.** $x^2 + 2x - 8$.

20. $x^2 - x + 4$. **21.** $9x^2 - 3x - 1$. **22.** $4x^2 + 1$.

23. $16x^2 - 1$. **24.** $x^2 + 1$. **25.** $x^2 + x + 1$.

26. $x^2 - x - 1$. **27.** $3x + 1$. **28.** $5x + 1$.

29. $3x^2 - 2x + 9$. **30.** $5x^2 + 3x + 4$. **31.** $2x^2 - 5x + 36$.

32. $7x^2 + 2x + 4$. **33.** $10x^2 - 7x + 1$.

34. $8x^2 - 2x + 25$. **35.** $6x^2 - 2x + 49$.

36. $x^2 - 6x + 5$. **37.** $x^2 - 3x + 2$.

38. $2x^2 + x - 6$. **39.** $2x^2 + 5x - 3$.

40. $2x^2 - 5x - 3$. **41.** $3x^2 + 7x + 2$.

42. $2x^2 - 3x - 10$. **43.** $3x^2 - 5x - 6$.

44. $5x^2 - 10x + 21$. **45.** $12x^2 + 7x - 6$.

Résoudre les équations suivantes, si possible de manière à trouver des valeurs entières pour x et y.

46. $x^2 + y^2 = \square$. **47.** $x^2 - y^2 = \square$. **48.** $3x^2 + y^2 = \square$.

49. $4x^2 + 7y^2 = \square$. **50.** $9x^2 - 5y^2 = \square$.

51. $3x^2 + 16y^2 = \square$. **52.** $(2x - 3y)y = \square$.

53. $(3x + 5y)x = \square$. **54.** $8x^2 - 3xy = \square$.

55. $7x^2 + 2xy = \square$. **56.** $(3y - 5x)x = \square$.

57. $(7y + 3x)y = \square$. **58.** $3x^2 - 2xy - 8y^2 = \square$.

59. $6x^2 - 5xy + 8y^2 = \square$. **60.** $(2x - y)(3x + 7y) = \square$.

61. $3(x^2 - y^2) - 8xy = \square$. **62.** $(2x + 3y)(8x - 5y) = \square$.

63. $3x^2 - 2xy + 3y^2 = \square$. **64.** $x^2 + y^2 + xy = \square$.

---

65. $x - y + 3 = \square$. **66.** $x + y + 3 = \square$.

67. $x^2 - y^2 + 1 = \square$. **68.** $x^2 + y^2 + 1 = \square$.

69. $x^2 + y^2 - 4 = \square$. **70.** $x^2 - y^2 + 12 = \square$.

71. La somme des trois côtés d'un triangle rectangle est 40; le produit des côtés de l'angle droit est 120. Quels sont les côtés?

72. Si l'on multiplie le carré d'un nombre par 5, qu'on ajoute 3, puis qu'on divise par 16, le reste est nul. Trouver ce nombre [1].

CHAPITRE XIII

DES INÉGALITÉS.

1° On peut, aux deux membres d'une inégalité, ajouter des quantités égales ou en retrancher des quantités égales sans changer le sens de l'inégalité.

2° On peut, sans en changer le sens, ajouter membre à membre des inégalités de même sens.

3° Quand, d'une inégalité, on retranche une autre inégalité de sens contraire, le résultat est de même sens que la première inégalité.

4° On peut multiplier ou diviser les deux membres d'une inégalité par un même nombre *positif* sans en changer le sens.

5° Si l'on multiplie ou qu'on divise les deux membres d'une inégalité par un nombre *négatif*, l'inégalité change de sens.

6° Elle change aussi de sens si l'on change les signes de toute l'inégalité.

7° On peut multiplier membre à membre deux inégalités de même sens; si tous les membres sont positifs, le produit est une inégalité de même sens que les facteurs.

[1] Les numéros 27, 28 et 64 à 72 inclusivement sont tirés du *Bija-Ganita* de Bhascara. N'employer dans le 71 que les données de l'énoncé.

8° Lorsque tous les membres sont positifs, on peut diviser une inégalité par une autre *de sens contraire ;* le résultat sera de même sens que la première inégalité.

9° Lorsque les deux membres d'une inégalité sont positifs, on peut les élever à une puissance quelconque sans changer le sens de l'inégalité.

10° Quels que soient les signes des deux membres d'une inégalité, on peut, sans changer le sens de celle-ci, les élever à une puissance de degré *impair.*

11° Si les deux membres sont négatifs et qu'on les élève à une puissance de degré pair, l'inégalité change de sens.

12° Quels que soient les signes des deux membres, on peut en extraire une racine d'indice *impair.*

13° Si les deux membres sont positifs, on pourra en extraire une racine d'indice pair. Si l'on considère les racines positives, l'inégalité ne change pas de sens; elle en change, si l'on prend les racines négatives.

---

1. Inégalités du premier degré.

LXXV

Ajoutez membre à membre les inégalités suivantes :

1. $5 > 3$; $8 > 2$. **2.** $11 > 7$; $2 > .$

3. $a + 1 < x^2$; $a - 5 < 2x$.

4. $2a + b > 3x - 8$; $4a > x - 2b$.

5. $x^2 + y > 3 - a$; $y^2 - 2a > b + 4$.

6. $3x^2 + 2a > 4a - 2$; $5a - 2x^2 > 8 + 3a$.

7. $3x + y < 2a - 1$; $3y - 2x < 14 - 2a$.

8. $x^2 - x + 3 > 4a + 2$; $3x - 4 - x^2 > 1 - a$.

Dans chacun des exemples suivants, retranchez la seconde inégalité de la première.

9. $15 > 12$; $3 < 7$. **10.** $3{,}5 > \frac{3}{2}$; $0{,}5 < \frac{3}{4}$.

11. $6\frac{1}{2} < 10$; $2\frac{1}{2} > 1$.
12. $a + x^2 < 3$; $x^2 - 4 > 2$.

13. $a^2 < 3 - x$; $2x > b^2$.

14. $8 > (a + b)^2$; $(a - b)^2 < 2$.

15. $a(a - x^2) > b^2 - 1$; $a^2 - 2ax^2 < 7$.

16. $2(a + b)^3 > 9$; $2(a^3 + b^3) < 11 - 6a^2b$.

Multipliez les deux membres des inégalités suivantes par les facteurs indiqués dans chaque cas.

17. $3 > -1$ par 7.
18. $-9 < 1$ par 2.

19. $3 > 0{,}5$ par -2.
20. $a^2 > b$ par $-b$.

21. $4a > -x$ par -2.
22. $-7 < -2$ par -4.

23. $(a - b)^2 > (x + y)^2$ par -1.

24. $m - 1 > a$ par $-m$.
25. $18 - y^2 < 5$ par a^2.

26. $1 - m < m + 5$ par 4.

Divisez les inégalités suivantes :

27. $9 > 6$ par 3.
28. $36 < 48$ par -6.

29. $147 > 91$ par 7.
30. $a^3 < a^5$ par a^2.

31. $a^2 - b^2 > a - b$ par $a - b$.

32. $5a^8 < 15a^2$ par $-5a$.

33. $13x^2 + 26b > 91x^2$ par -13.

Effectuez les opérations indiquées ci-après (1) :

34. $(4 > 2)(5 > 1)$.
35. $(a - 1 < 7)(a + 1 < 10)$.

36. $(13 > 7)(8 < 11)$.
37. $(a + b > m)(n < a - b)$.

38. $(a^2 - ab + b^2 > 5)(6 < a^2 + ab + b^2)$.

39. $(a^2 + ab + b^2 > x - y)(x + y < a - b)$.

40. $(40 > 35) : (5 < 7)$.
41. $(8 > 2) : (1\frac{1}{2} < 7)$.

42. $(72 > 21) : (7 > 3)$.

43. $(x^2 - y^2 > a^2) : (2a > x + y)$.

(1) Dans les exercices comme le 45, il faut élever chacun des membres à la puissance indiquée et mettre entre les résultats le signe convenable. — Dans les exercices semblables au n° 60, il faut extraire de chaque membre la racine indiquée, et joindre les deux résultats par le signe convenable.

44. $(3a^2b + 3ab^2 > x^2 - y^2) : (x - y > 3ab)$.

45. $(30 > 12)^2$. **46.** $(3 < 7)^3$. **47.** $(a+b>a-x)^3$.

48. $(a - b < m + 1)^2$. **49.** $(x + 1 < y)^4$.

50. $(1 + x - a > x - b)^2$. **51.** $(a - 1 < b - 2)^5$.

52. $(3 > -2)^3$. **53.** $(-1 > -2)^5$. **54.** $(1 - x < -a)^3$.

55. $(3 - e > -1)^7$. **56.** $(-5 > -7)^2$.

57. $(-(1 + a) < -b)^4$. **58.** $(-(m+n) < -(7+n))^2$.

59. $(-a(1 + m) > x)^3$. **60.** $\sqrt[3]{27 > 8}$.

61. $\sqrt[3]{-125 < +64}$. **62.** $\sqrt[5]{-7776 < -243}$.

63. $\sqrt[3]{729 > 343}$. **64.** $\sqrt[3]{-729 < -343}$.

65. $\sqrt{36 > 25}$. **66.** $\sqrt[4]{625 < 2401}$.

Simplifier les inégalités suivantes :

67. $4 + 3ab > 2x - (a - b)^2$.

68. $(a - x)^3 + 2 > 2a^3 - 2ax(a - x)$.

69. $(x - 1)^3 < x^3 - x^2 + 4x$.

70. $(a + x)(a - x) < -(a - x)^2 + 3$.

71. $x^3 - y^3 < (x - y)(x^2 + y^2)$.

72. $a^6 - x^6 > (a^2 - x^2)(a^4 + x^4 + 2)$.

LXXVI

Résoudre les inégalités suivantes :

1. $x + 4 > 2 - 3x$. **2.** $3\frac{1}{2} + 5x < 7x + 4$.

3. $(x + 1)^2 < x^2 + 3x - 5$.

4. $(x^2 - a^2)x < (x - a)(x^2 - 2a^2x + 2)$.

5. $4x - 3 > \frac{3x}{2} - \frac{3}{5}$. **6.** $0{,}2x - 3\frac{1}{3} > 1\frac{3}{4} - \frac{5}{2}x$.

7. $3x - 2 < \frac{x}{2} + 7\frac{1}{3}$.

8. $(a + y)^2 + 3y^2 < (2y - 1)^2 + 7$.

9. $2\sqrt{x^3} > \sqrt{4(x - 1)^3 + 12x^2 - 7}$.

10. $\sqrt[6]{x^2 - 2x + 8} > \sqrt[3]{x + 4}.$

11. $\sqrt{m^2 + 5mx + 4x^2} < 2x + 3m.$

12. $3x - \sqrt{7} > \sqrt{9x^2 + x - 2 - 6x\sqrt{7}}.$

13. $\sqrt{2} - 3\sqrt{x} < \sqrt{4 + 9x - 12}.$

14. $4 - 3x < \sqrt[3]{63 - 27x^3 + 108x^2}.$

15. $\dfrac{4x - 2}{3} > \dfrac{3 - 5x}{7}.$

16. $\dfrac{8 - 5x}{4} > \dfrac{x - 2}{3}.$

17. $\sqrt{\dfrac{2x^2 - 3}{2}} > x + 5.$

18. $1\frac{2}{8} + x < 2\frac{1}{7} - 3x.$

Résoudre les inégalités suivantes à deux inconnues :

19. $2x - 3y > 4$
$4x + y > 12.$

20. $2x + y < 20$
$5x - 3y < 11.$

21. $3x - 1 > x + 3y$
$x(1 - 3x) > 4x - 3x^2 - 2y.$

22. $(a + x)^2 - y < 3ax - 5 + x^2.$
$x + 2ay < 15 - 3x.$

23. $2x(2x - 3) > (2x + 1)^2 - 3y$
$4x - y > x + 4.$

24. $(2x - y)^2 < 4x^2 + y^2 - x^2$
$1\frac{1}{2}x - y - 1 > 0.$

25. $\sqrt{x^2 - 3x + y} > x + 2$
$x - y > 3.$

26. $(x - 2)(y + 3) > xy - 1\frac{1}{2}$
$0{,}5x + 0{,}2y > 0{,}1.$

27. $\sqrt{(2x - 1)(y + x)} > \sqrt{2(xy + x^2) + 4}$
$5x + 2y > 8.$

---

28. Prouver que $a^2 + b^2 > 2ab.$

29. Prouver qu'une fraction augmentée de sa valeur réciproque donne une somme plus grande que 2.

30. Soient $\dfrac{a}{m}; \dfrac{b}{n}; \dfrac{c}{p} \dots \dfrac{h}{u}$ des fractions dont les dénomina-

teurs ont tous le même signe, et rangées par ordre de grandeur, de telle sorte que $\frac{a}{m}$ soit la plus petite. Prouver que

$$\frac{a+b+c+\ldots.h}{m+n+p+\ldots.u} > \frac{a}{m} \text{ et } < \frac{h}{u}.$$

31. Quelle est la plus grande des deux sommes $\sqrt{7}+\sqrt{10}$ ou $\sqrt{3}+\sqrt{19}$?

32. Quelle est la plus grande des deux sommes $\sqrt{8}+\sqrt{12}$ ou $\sqrt{2}+\sqrt{20}$?

33. Quelle est la plus grande des deux sommes $\sqrt{10}+\sqrt{8}+\sqrt{6}$ et $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{24}$?

---

2. Inégalités du second degré.

LXXVII

Une inégalité du second degré peut toujours être ramenée à la forme :

$$ax^2+bx+c>0 \quad \text{ou} \quad ax^2+bx+c<0.$$

La résoudre, c'est chercher entre quelles limites doivent être renfermées les valeurs de x pour que l'inégalité soit satisfaite.

Résoudre les inégalités suivantes :

1. $x^2+4x+5\frac{1}{2}>\frac{3}{2}$.

2. $25x^2+10+29x>1-x$.

3. $4x^2+7\frac{1}{4}>2x+7$.

4. $x^2+x>7x-10$.

5. $x^2+19>1+8x$.

6. $29-11x>-x(1+x)$.

7. $x^2+x-6>0$.

8. $6x^2+7x+2<0$.

9. $x^2+2x-15<0$.

10. $x^2-4x+7<0$.

11. $x^2-10x+32<0$.

12. $x^2+16x-80<0$.

---

13. $4x+21-x^2>0$.

14. $4x+12-x^2>0$.

15. $15-x-2x^2>0$.

16. $17x-6x^2-5<0$.

17. $38x - 7 - 15x^2 < 0.$ **18.** $9x < 20x^2 + 1.$

19. $x^4 - 7x^2 + 12 > 0.$ **20.** $x^4 - 13x^2 + 36 > 0.$

21. $x^4 - 73x^2 + 576 < 0.$ **22.** $x^4 - 104x^2 + 400 > 0.$

23. $x^4 - 104x^2 + 400 < 0.$

24. $x^4 - \frac{5}{6}x^3 - 6\frac{1}{3}\,x^2 - \frac{5}{6}\,x + 1 > 0.$

25. $\frac{x-5}{x-7} > 0$ **26.** $\frac{x-6}{x+5} > 0.$ **27.** $\frac{x^2-9}{x^2-4} < 0.$

28. $\frac{x-1}{x^2+4x+2} < 0.$ **29.** $\frac{x^2+2x-3}{x^2-2x-8} > 0.$

30. $\frac{x^2-5x+6}{x^2-3x-10} > 0.$ **31.** $\frac{x^2+5x+4}{x^2-5x-6} < 0.$

CHAPITRE XIV

PERMUTATIONS ; ARRANGEMENTS ; COMBINAISONS.

LXXVIII

1. Permutations.

Les permutations de m lettres sont les résultats qu'on obtient en écrivant, dans tous les ordres possibles, ces m lettres à la suite les unes des autres, de façon que chaque lettre entre dans chaque permutation, mais une fois seulement.

Soit P_m le nombre des permutations de m lettres ; on a :

$$P_m = 1.\ 2.\ 3.\ 4 \ldots..\ m \quad (^1).$$

Si dans m objets, il y a α objets d'une première espèce, β d'une seconde, γ d'une troisième, le nombre des permutations possibles est donné par la formule :

$$P_m = \frac{1.\ 2.\ 3 \ldots.\ m}{1.\ 2.\ 3.\ \alpha \times 1.\ 2.\ 3 \ldots \beta \times 1.\ 2.\ 3 \ldots \gamma} = \frac{\underline{|m}}{\underline{|\alpha}.\ \underline{|\beta}.\ \underline{|\gamma}}.$$

---

(1) Ce produit des m premiers nombres naturels s'écrit souvent, pour abréger, $m\,!$; cette notation a été introduite par Kramp (1808). Les auteurs anglais écrivent ce produit $\underline{|m}$. Ainsi : $1.\ 2.\ 3 \ldots.\ p = p\,! = \underline{|p}$.

1. De combien de manières différentes peut-on placer à la suite les unes des autres les 26 lettres de l'alphabet?

2. Combien de mots différents peut-on faire avec les lettres du mot *âme?*

3. De combien de manières peut-on placer à table 14 personnes ?

4. De combien de manières peut-on placer les 30 élèves d'une classe ?

5. Combien de mots différents peut-on faire avec les lettres du mot *maison?*

6. De combien de manières peut-on frapper successivement les 8 cloches d'un carillon ?

7. De combien de manières peut-on placer en rang 25 hommes ?

8. On veut ranger en demi-cercle 20 vases de fleurs. De combien de manières différentes peut-on les disposer ?

9. Combien de nombres peut-on former avec les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, chaque chiffre figurant dans chaque nombre, mais une fois seulement ?

10. Dans la même supposition, combien de nombres différents peut-on former avec les chiffres 1, 2.... 9, 0 ? On ne comptera pas les nombres commençant par zéro.

11. Combien de mots pourrait-on faire avec les lettres des mots *combiner* ; *oxydant ; manipuler ; Andore, Charlestown?*

12. Combien de mots différents pourrait-on faire avec les lettres des mots *pachyderme ; divisibilité ; inconstitutionnellement ; Mississipi ; hippopotame ; Caracas, Philippine ?*

13. De combien de manières différentes peut-on placer à la suite les uns des autres 24 œufs teints, dont 4 sont jaunes, 8 bleus, 7 bruns et les autres rouges ?

14. Sur un rayon d'une bibliothèque se trouvent 30 volumes, dont 10 sont reliés en parchemin blanc, 9 en maroquin rouge, 6 en maroquin vert, et les 5 autres en toile brune. De combien de manières peut-on les disposer quant aux couleurs ?

Combien de permutations peut-on faire avec les produits suivants :

15. a^2bc. **16.** $a^3b^7c^2$. **17.** $a^7x^5cd^4$. **18.** $a^5x^5y^8z^2$.
19. $b^{10}c^4d^8x^3y^2$.

20. Combien de permutations peut-on faire subir aux lettres des vers suivants :

Sur la route de la vie
Semons quelque bien.

21. Combien de mots peut-on faire avec 9 lettres, 3 d'entre elles devant rester inséparables et conserver le même ordre ?

22. Quelle serait la réponse au problème précédent si les trois lettres inséparables peuvent se placer entre elles dans n'importe quel ordre ?

23. Avec 7 lettres, parmi lesquelles il y a plusieurs *a*, on peut faire 210 mots différents. Combien y a-t-il d'*a* ?

LXXIX

2. Arrangements.

Soient m objets différents. Si on les prend 2 à 2, 3 à 3, 4 à 4.... n à n ($m > n$), et que, chaque fois, on les place dans tous les ordres possibles, les résultats qu'on obtient sont des *arrangements*.

Si l'on représente par A_n le nombre des arrangements de m objets n à n, on a :

$$A_n = m\,(m-1)\,(m-2)\,(m-3)\,.....\,(m-n+1).$$

Soient les lettres a, b, c, d. Si l'on emploie chacune d'elles successivement devant toutes les autres (aa, ab, ac, ad ; ba, bb, bc, bd, etc.), on obtient les arrangements 2 à 2 *avec répétition*. Les arrangements 3 à 3 s'obtiendraient en plaçant successivement chacune des lettres a, b, c, d devant chaque arrangement 2 à 2. Le nombre des *arrangements avec répétition* de m objets

pris 2 à 2 est de m^2 — pris 4 à 4 de m^4
» 3 à 3 » m^3 — » m à m » m^m.

Soit $\Sigma A_{1,2,3...m}$ le nombre total des arrangements avec répétition de m objets pris 1, 2, 3...m à la fois ; on a :

$$\Sigma A_{1,2,3...m} = m + m^2 + m^3 + ... + m^m = m\,\frac{m^m-1}{m-1}.$$

1. Combien d'arrangements peut-on former avec 12 objets pris 2 à 2?

2. Combien d'arrangements peut-on faire avec 30 objets pris 8 à 8?

3. Une personne a 2 anneaux de forme différente. De combien de manières peut-elle les placer à ses doigts, soit à la main gauche, soit à la droite, en mettant un seul anneau par doigt? Le pouce n'en reçoit point.

4. Combien d'arrangements peut-on faire avec 15 objets 6 à 6?

5. Combien d'arrangements peut-on faire avec 26 lettres en les prenant : 1° 4 à la fois ; 2° 6 à la fois ?

6. Combien de nombres de 3 chiffres peut-on former avec les chiffres de 1 à 9 inclusivement ?

7. Avec les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, combien pourrait-on former de nombres : 1° de trois chiffres ; 2° de quatre chiffres? Dans l'un et l'autre cas, on exelura les nombres où le zéro occuperait la première place à gauche.

8. Combien de mots pourrait-on former avec 20 consonnes et 6 voyelles, chaque mot devant renfermer 3 consonnes et 2 voyelles, et celles-ci ne pouvant occuper que la seconde place et la quatrième ?

9. Quelle serait la réponse au problème précédent si les voyelles pouvaient occuper une place quelconque?

10. Combien de mots de 3 lettres pourrait-on faire avec 20 consonnes et 6 voyelles, en prenant 2 consonnes et une voyelle pour chaque mot? Les voyelles peuvent représenter en tout, au moyen d'accents, 10 sons différents.

11. De combien de manières peut-on frapper les 10 cloches d'un carillon en les prenant : 1° quatre à quatre ; 2° cinq à cinq?

12. Le nombre des arrangements de n objets 3 à 3 est au nombre des arrangements des mêmes objets 4 à 4, comme 1 : 20. Trouver n.

13. Un nombre m d'objets est au nombre de ses arrangements 3 à 3 comme 1 : 240. Trouver m.

14. Combien de nombres de 4 figures peut-on former : 1° avec les chiffres 1, 2, 3, 4 ; 2° avec les chiffres de 1 à 9 inclusivement ? Dans l'un et l'autre cas, les chiffres peuvent se répéter.

15. Quel est le nombre des arrangements avec répétition de 12 objets pris 5 à 5?

16. Quel est le nombre total des arrangements sans répétition qu'on pourrait faire avec 16 objets en les prenant 1, 2, 3,... 16 à la fois?

17. Quelle serait la réponse au problème précédent si les arrangements se font avec répétition?

18. Quel est le nombre total des arrangements avec répétition de 26 lettres prises 2, 3, 4,... 10 à la fois?

19. Le nombre des arrangements avec répétition de n objets 8 à 8 est au nombre des arrangements, avec répétition, des mêmes objets pris 3 à 3 comme 537824 est à 1. Trouver n.

20. Le nombre total des arrangements 1, 2, 3... 8 à la fois de p objets est au nombre total des arrangements 1, 2, 3, 4 à la fois, comme 1297 est à 1. Dans les deux cas il y a répétition. Trouver p.

LXXX

3. Combinaisons.

Supposons qu'on prenne m lettres 2 à 2, 3 à 3, ... n à n, et qu'on en forme des groupes dans lesquels l'ordre des éléments soit indifférent, mais tels que deux groupes quelconques diffèrent l'un de l'autre au moins par une lettre ; les résultats qu'on obtiendra sont des *combinaisons* ou des *produits différents*.

Soit C_n le nombre des combinaisons de m lettres prises n à n ; on a :

$$C_n = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}.$$

Soit $\Sigma\, C_{1,2,3\ldots m}$ la somme de toutes les combinaisons de m objets pris 1, 2, 3...m à la fois ; on a :

$$\Sigma\, C_{1,2,3\ldots m} = 2^m - 1.$$

Si l'on a m collections d'objets contenant respectivement p, q, r, s, etc. objets différents, et qu'on fasse des combinaisons en prenant chaque fois *un* seul objet dans chaque collection, on a pour le nombre total C des combinaisons :

$$C = p.\ q.\ r.\ s.\ \text{etc.}$$

Si deux collections contiennent respectivement m et n objets, le nombre C des combinaisons qu'on peut obtenir en prenant p objets de la première et q objets de la seconde collection, est donné par la formule :

$$C = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-p+1)}{1.\ 2\dots\ p} \times \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-q+1)}{1.\ 2\dots\ q}.$$

---

1. Combien peut-on former de produits différents avec les nombres naturels de 2 à 13, inclusivement, en les multipliant 3 à 3 ?

2. Un capitaine ayant sous ses ordres 60 hommes doit former une garde de 8 hommes. De combien de manières différentes peut-il la composer ?

3. Un négociant, qui a 8 espèces de café, veut en faire des mélanges par parties égales en prenant pour chaque mélange 3 qualités différentes. Combien de mélanges différents peut-il faire ?

4. Pour composer un parquet, on a des briques hexagones de 12 couleurs différentes. En associant les couleurs 4 à 4, combien de combinaisons de couleurs pourrait-on obtenir ?

5. Une assemblée délibérante de 50 membres doit élire une commission de 12 membres pris dans son sein. Entre combien de combinaisons peut choisir l'assemblée ?

6. Un nombre a pour facteurs premiers 2, 3, 7, 13, 17. Combien ce nombre a-t-il de diviseurs, en y comprenant les facteurs premiers ? On ne comptera ni le nombre lui-même ni l'unité.

7. L'effectif de 4 compagnies est réduit respectivement à 40, 62, 70 et 73 hommes. De combien de manières un officier peut-il composer un piquet de 4 hommes en prenant un soldat dans chaque compagnie ?

8. Dans une élection, il se présente 6 candidats pour 4 personnes à élire. Si chaque électeur peut porter sur son bulletin un nombre quelconque de noms, sans toutefois dépasser 4, de combien de manières peut-il voter?

9. On voudrait diviser 15 objets en lots contenant chacun 3 objets. De combien de manières peut-on faire les lots?

10. Un homme a 5 pantalons, 8 gilets et 7 habits. Dans combien de costumes différents peut-il paraître?

11. Combien de composés différents formeraient 66 corps simples s'unissant 2 à 2, 3 à 3 et 4 à 4, dans les proportions de un atome d'un élément pour un atome de l'autre?

12. Combien de combinaisons formeraient ces mêmes éléments se combinant 2 à 2, 3 à 3, 4 à 4, si chaque élément entrait dans les composés pour 1, 2, 3 ou 4 atomes?

13. Un détachement de 30 hommes doit fournir chaque nuit une garde de 4 hommes. Pour combien de nuits pourrait-on former une garde différente, et combien de fois chaque soldat serait-il de service?

14. Combien peut-on faire de combinaisons avec 10 lettres, a, b, c, d, etc., prises 5 à la fois? Dans combien de combinaisons entrera a? Dans combien entreront à la fois a, b, c?

15. On a m objets différents. Calculer la valeur de n pour que, en combinant ces m objets n à n, le nombre des combinaisons soit maximum.

16. Une fabrique de parquets emploie 10 dessins différents. En quel nombre faut-il associer ces dessins les uns aux autres pour avoir le plus grand nombre possible de combinaisons?

17. Combien en tout pourrait-on obtenir de combinaisons en associant ces parquets 1 à 1; 2 à 2,... 10 ensemble?

18. Le nombre des combinaisons de $n + 2$ objets 4 à 4 est au nombre des combinaisons de n objets 2 à 2 comme 11 : 1. Trouver n.

19. Le nombre total des combinaisons de $2n$ objets 1, 2, 3 ensemble, est au nombre de n objets comme 387 : 1. Trouver n.

20. Trouver combien a de diviseurs un nombre qui est égal à $2^5 \times 3 \times 5^4 \times 7 \times 13$.

21. Combien a de diviseurs le nombre $2^3 \times 5^2 \times 7 \times 11 \times 13$?

22. Combien a de diviseurs le nombre $2^4 \times 3^5 \times 5^2 \times 7 \times 11 \times 13$?

23. Prouver que le nombre des combinaisons de m objets n à n est le même que celui des combinaisons $(m - n)$ à $(m - n)$.

24. On veut distribuer 52 cartes en 4 paquets de 13 cartes chacun. Combien faudrait-il d'années pour épuiser toutes les combinaisons possibles en formant 4 combinaisons par minute, et en travaillant tous les jours et 15 heures par jour? On comptera l'année à 365 jours 6 heures.

25. Un éditeur veut publier pour la jeunesse un volume orné de 12 chromolithographies et 18 gravures. Il peut choisir entre 30 chromolithographies et 37 gravures. Combien de combinaisons différentes a-t-il à sa disposition pour illustrer le volume?

26. Une assemblée d'actionnaires composée de 40 négociants, 20 avocats, 30 industriels et 10 médecins veut nommer dans son sein une commission de 4 négociants, 3 industriels, 1 médecin, 2 avocats. De combien de manières, peut-on constituer la commission ?

CHAPITRE XV

BINOME DE NEWTON.

LXXXI

Soit m une quantité entière positive; on a [1] :

$$(A)\quad (a+b)^m = a^m + \frac{m}{1}a^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{1.\,2}a^{m-2}b^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\,2.\,3}a^{m-3}b^3 + \dots + \frac{m(m-1)\dots\dots 2}{1.\,2.\,3.\,(m-1)}ab^{m-1} + \frac{m(m-1)\dots\dots 2.\,1}{1.\,2.\,3\,\dots\,m}b^m.$$

[1] Cette formule, l'une des plus importantes de l'algèbre, est due à Isaac Newton (1642 à † 1727). On la désigne ordinairement sous le nom de *formule du binome de Newton.*

$$\text{Le } n^e \text{ terme} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+2)}{1.\,2.\,3\ldots\ldots(n-1)}\, a^{m-n+1}\, b^{n-1}.$$

Le développement se termine et renferme $m + 1$ termes.

Appliquez la formule du binome au développement des expressions suivantes :

1. $(a + x)^3$. **2.** $(b + x)^4$. **3.** $(d + y)^5$. **4.** $(c + z)^6$.
5. $(a + p)^7$. **6.** $(m + n)^{11}$. **7.** $(p + v)^{13}$. **8.** $(a - b)^4$.
9. $(a - b)^5$. **10.** $(a - x)^7$. **11.** $(h + z)^{13}$. **12.** $(h - z)^{11}$.
13. $(a - c)^8$. **14.** $(b - p)^9$. **15.** $(z - d)^{13}$. **16.** $(1 + x)^{12}$.
17. $(1 - x)^9$. **18.** $(1 - a)^8$. **19.** $(1 + a)^{15}$. **20.** $(1 - z)^{14}$.
21. $(x + 1)^9$. **22.** $(x - 1)^{11}$. **23.** $(y - 1)^8$. **24.** $(z + 1)^7$.
25. $(z - 2)^8$. **26.** $(2 + x)^3$. **27.** $(2 - x)^4$. **28.** $(3 + x)^8$.
29. $(x - 3)^9$. **30.** $(z + 5)^6$. **31.** $(a - 5)^8$. **32.** $(4 - b)^7$.
33. $(h - 2)^{10}$. **34.** $(a - 10)^6$. **35.** $(b + 4)^5$.

---

36. $(\frac{1}{2} + x)^5$. **37.** $(y + \frac{1}{3})^6$. **38.** $(\frac{1}{4} - v)^7$. **39.** $(a - \frac{1}{5})^5$.

40. $(0{,}3 + x)^6$. **41.** $(0{,}4 - z)^7$. **42.** $(3{,}2 + b)^5$.
43. $(c + 1{,}5)^4$. **44.** $(a - 2{,}1)^6$. **45.** $(2a + x)^5$.
46. $(3a - y)^7$. **47.** $(\frac{1}{2}a + z)^6$. **48.** $(\frac{1}{3}b - y)^8$.
49. $(\frac{2}{3}x + y)^9$. **50.** $(\frac{3}{4}a - b)^{11}$. **51.** $(c - \frac{3}{5})^4$.
52. $(-x + 2a)^7$. **53.** $(-3x + b)^8$. **54.** $(-y + 2c)^9$.
55. $(-z + 3a)^5$.

---

56. $(2x + 3a)^6$. **57.** $(5d - 3y)^5$. **58.** $(4d - 3z)^7$.
59. $(0{,}2a + 0{,}3b)^5$. **60.** $(1{,}2b - 0{,}2y)^7$. **61.** $(\frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b)^5$.
62. $(\frac{1}{5}c - \frac{1}{4}d)^8$. **63.** $(\frac{2}{5}m + \frac{3}{4}p)^9$. **64.** $(\frac{2}{5}z - \frac{3}{7}b)^6$.
65. $(\frac{3}{5}h - \frac{1}{2}v)^7$. **66.** $(a^2 + b^3)^5$. **67.** $(x^3 - a^5)^6$.
68. $(y^2 + b)^7$. **69.** $(d^3 - b^2)^8$. **70.** $(a^3 - y^2)^9$.

71. $(d^3 - 3x^2)^8$. **72.** $(2h^2 - 3x^3)^5$. **73.** $(3a^2 + 5b^3)^7$.
74. $(1 - 2x^3)^5$. **75.** $(3x^2 - 1)^8$. **76.** $(1 + \frac{2}{3}a^5)^8$.
77. $(\frac{1}{2}p^5 + 3y^4)^5$. **78.** $(\frac{2}{3}a^3 + \frac{3}{4}b^2)^5$. **79.** $(0{,}2a^3 - \frac{2}{3}x^4)^4$.
80. $(\frac{5}{3}l^2 + 0{,}3p^3)^7$. **81.** $(2a - 3cx)^7$. **82.** $(3a^2 + 2c^2x^3)^6$.
83. $(bc^2 - 2ay^3)^5$. **84.** $(4c^4 - 3acx^5)^4$. **85.** $(a^2b^3 + 2a^3bx^4)^5$.
86. $(\frac{2}{3}ab^2 - \frac{3}{4}a^2y)^7$.

---

87. $(\sqrt{a} + x)^7$. **88.** $(\sqrt{2b} - m)^8$. **89.** $(\sqrt{3c} + 2a)^7$.
90. $(\sqrt{\frac{1}{2}a} - 3y)^8$. **91.** $(2\sqrt{e} + a)^6$. **92.** $(2b - \sqrt{x})^9$.
93. $(\frac{2}{3}a + \sqrt{2x})^6$. **94.** $(\frac{3}{4}a - \sqrt{\frac{1}{2}x})^5$. **95.** $(2a - 3\sqrt{y})^6$.
96. $(a^2 + \frac{1}{2}\sqrt{z})^7$. **97.** $(\sqrt{a} + \sqrt{x})^9$. **98.** $(\sqrt{b} - \sqrt{y})^8$.
99. $(\sqrt{2c} + \sqrt{3x})^6$. **100.** $(\sqrt{\frac{1}{2}a} - \sqrt{2x})^7$. **101.** $(\sqrt{\frac{2}{3}a} + \sqrt{\frac{3}{4}x})^6$.
102. $(\sqrt{a^3} - \sqrt{x^5})^{10}$. **103.** $(\sqrt{b^5} + \sqrt{y^4})^9$.
104. $(\sqrt{\frac{2}{3}h^3} + \sqrt{\frac{1}{2}x^4})^6$. **105.** $(\sqrt[3]{2a} + \sqrt[3]{3x^2})^8$.
106. $(2ax + \sqrt[3]{3xy^2})^5$. **107.** $(\sqrt{3ay} + \sqrt[3]{2x^2y})^7$.
108. $(3abx^3 - \sqrt[3]{5b^2xy^2})^8$. **109.** $\left(\frac{\sqrt{x}}{a} + \frac{\sqrt[3]{y}}{b}\right)^{10}$.
110. $\left(\frac{\sqrt[3]{x^2}}{a^2} + \frac{\sqrt[4]{xy^3}}{b}\right)^7$. **111.** $\left(\frac{\sqrt{xz}}{y} - \frac{\sqrt[3]{ay^2}}{x^2}\right)^6$.
112. $(2a - x\sqrt{-1})^7$. **113.** $(3b^2 + 2x\sqrt{-1})^6$.
114. $(\sqrt{a^3} + i\sqrt{x})^5$. **115.** $(\sqrt[3]{a^2} + i\sqrt[4]{x^3})^6$.
116. $(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt{-1})^9$. **117.** $(i\sqrt{b} + i)^{10}$.
118. $(i\sqrt[3]{x^2} - i\sqrt{2})^9$. **119.** $(i\sqrt[5]{y^4} + i\sqrt[3]{5})^7$.
120. $\left(\frac{2i\sqrt{b^3}}{y} - \frac{di\sqrt[3]{y^2}}{b}\right)^8$.

Trouver, dans les développements suivants, le terme demandé.
121. Le 7e terme de $(2+a)^{16}$. **122.** Le 11e t. de $(a + d)^{21}$.
123. Le 6e t. de $(3 + 2x^2)^9$. **124.** Le 12e t. de $(a^2 - 3x^5)^{20}$.

125. Le 18e t. de $(1 + x^2)^{30}$. **126.** Le 14e t. de $(y^3 - 1)^{40}$.

127. Le 7e t. de $\left(\frac{1}{2}a - \sqrt{x^3}\right)^{17}$. **128.** Le 4e t. de $\left(\sqrt{a} - \sqrt[3]{x^2}\right)^{11}$.

129. Le 6e t. de $\left(\sqrt{a} - ix\right)^{13}$. **130.** Le 30e t. de $(b - 2c^2)^{50}$.

131. Prouver que le coefficient du n^e terme depuis le commencement est égal au coefficient du n^e terme depuis la fin.

132. Quel est le plus grand coefficient dans le développement de $(1 + x)^m$?

133. Quel est le plus grand coefficient du développement: 1° de $(a + b^3)^{21}$; 2° de $(b + x^2)^{16}$; 3° de $(1 + y^5)^{32}$?

134. Prouver que, dans le développement de $(1 + a)^m$, la somme des coefficients de rang pair est égale à la somme des coefficients de rang impair.

135. Prouver que dans le développement $(1 + x)^m$, la somme des coefficients des termes en x est égale à $2^m - 1$.

LXXXII

Au lieu de $(a + b)^m$, on peut écrire $a^m\left(1 + \frac{b}{a}\right)^m$, ou en remplaçant dans la parenthèse, pour simplifier $\frac{b}{a}$ par x, on voit qu'on est conduit à développer une quantité de la forme $(1 + x)^m$. Or d'après la formule (A) du paragraphe précédent, on a:

$$(B) \quad (1 + x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.\ 2.}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3}x^3 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}x^4 + \text{etc.}$$

Si m est entier négatif, ou fractionnaire (posit. ou nég.), le nombre des termes du second membre de (B) est illimité. Si, en valeur absolue, $x > 1$, ce second membre va en croissant indéfiniment et ne peut être égal au premier membre, dont la valeur est finie. Tel est le cas du développement de $\frac{1}{1-x}$. On a:

$$\frac{1}{1-x} = (1 - x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \text{etc.}$$

Pour $x = 2$, le premier membre est négatif, tandis que le second est positif et indéfiniment croissant.

Si, en valeur absolue, $x < 1$, le second membre converge[1] vers une valeur limite, qui est la valeur du premier membre.

On pourra donc développer $(a + b)^m$ d'après la formule (A), page 237, dans le cas où m sera entier et négatif, ou fractionnaire, mais en opérant ainsi qu'il suit. Si $a > b$, on posera :

$$(C) \quad (a+b)^m = a^m\left(1+\frac{b}{a}\right)^m = a^m + \frac{m}{1}a^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{1.\ 2}a^{m-2}b^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3}a^{m-3}b^3 + \text{etc.}$$

Si $a < b$, on développera ainsi :

$$(D) \quad (a+b)^m = b^m\left(1+\frac{a}{b}\right)^m = b^m + \frac{m}{1}b^{m-1}a + \frac{m(m-1)}{1.\ 2}b^{m-2}a^2 + \text{etc.}$$

---

1. Développer $(1+x)^{-1}$, et faire ensuite : 1° $x=\frac{1}{9}$; 2° $x=0{,}07$; 3° $x=-0{,}009$.

2. Développer $(1+x)^{\frac{1}{2}}$, et faire ensuite : $x=\frac{3}{8}$.

3. Développer $(1+x)^{-\frac{1}{2}}$, et faire ensuite : $x=0{,}003$.

4. Développer $(1+x)^{\frac{1}{3}}$, et faire ensuite: 1° $x=\frac{7}{12}$; 2° $x=-0{,}09$; 3° $x=\frac{1}{8}$.

5. Développer $(1+x)^{-\frac{1}{3}}$, et faire ensuite : 1° $x=-\frac{2}{11}$; 2° $x=-0{,}002$; 3° $x=-\frac{1}{8}$.

6. Développer $(1-x)^{\frac{2}{5}}$, et faire ensuite $x=0{,}004$.

Développer les exemples suivants :

[1] On dit qu'une série est *convergente* si, à mesure qu'on augmente le nombre des termes, la somme de ceux-ci s'approche indéfiniment d'une valeur déterminée qu'on nomme la *limite*, et dont cette somme ne diffère que d'une quantité qu'on peut rendre aussi petite qu'on voudra. L'examen des diverses conditions de convergence appartient à l'étude des séries.

7. $(1+15)^{\frac{1}{4}}$. 8. $(2+27)^{\frac{1}{3}}$. 9. $(1+9)^{-2}$. 10. $(1+64)^{\frac{1}{2}}$.

Former les huit premiers termes des exemples suivants, dans lesquels le second terme du binome est supposé plus petit que le premier, en valeur absolue.

11. $(a+x)^{-5}$. 12. $(a-x)^{-6}$. 13. $(2b-y)^{-6}$.

14. $(\frac{1}{2}c+z)^{-9}$. 15. $(3-x)^{-8}$. 16. $(a+\frac{1}{2}x)^{-9}$.

17. $(1+x)^{10}$. 18. $(1-y)^{-11}$. 19. $(z+1)^{-9}$.

20. $(1-x)^{-1}$. 21. $(a^2+x^3)^{-5}$. 22. $(b^3-x^2)^{-8}$.

23. $(c+2x^3)^{-9}$. 24. $(a^2c+ax^2)^{-6}$. 25. $(\sqrt{a}-x^2)^{-6}$.

26. $(b+h)^{\frac{1}{2}}$. 27. $(b-x)^{\frac{1}{4}}$. 28. $(2a+y)^{\frac{1}{5}}$.

29. $(2+a)^{\frac{1}{6}}$. 30. $(x^2+a)^{\frac{1}{2}}$. 31. $(a^2-1)^{\frac{1}{2}}$.

32. $(a+2b)^{\frac{1}{7}}$. 33. $(1+a)^{\frac{1}{9}}$. 34. $(1+y)^{\frac{1}{10}}$.

35. $(1+z^2)^{\frac{1}{9}}$. 36. $(1+h)^{\frac{3}{4}}$. 37. $(2-y^3)^{\frac{4}{7}}$.

38. $(3+d^4)^{\frac{3}{5}}$. 39. $(a^3-b)^{\frac{4}{5}}$. 40. $(y^2-b^3)^{\frac{7}{8}}$.

41. $(a^3+1)^{-\frac{1}{2}}$. 42. $(x^2-a)^{-\frac{1}{2}}$. 43. $(1-x^5)^{-\frac{1}{3}}$.

44. $(1+2d)^{-\frac{1}{5}}$. 45. $(32+5h)^{-\frac{3}{5}}$. 46. $(9-2x^2)^{-\frac{3}{2}}$.

47. $(a^7+3y^4)^{-\frac{5}{7}}$. 48. $\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{\sqrt[3]{x}}{b}\right)^{-\frac{1}{2}}$. 49. $\left(\frac{\sqrt[3]{a^2}}{x}+\frac{x^2}{a}\right)^{-\frac{1}{3}}$.

50. $\left(\frac{a^{-1}}{2}-\frac{4}{x^2}\right)^{-\frac{3}{2}}$. 51. $(2+\sqrt[4]{2x^3})^{-\frac{3}{4}}$. 52. $\frac{1}{(a^2+x^3)^3}$.

53. $\frac{1}{(a^3-x^3)^{\frac{2}{3}}}$. 54. $\frac{1}{\sqrt{\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{3}}\right)^{-7}}}$.

Dans les exemples suivants, le premier terme du binome est supposé, en valeur absolue, plus petit que le second.

55. $(p+a)^{-1}$. 56. $(r+b^2)^{-3}$. 57. $(t-H)^{-5}$.

58. $(v-T)^{-4}$. 59. $(3-4a^2)^{-\frac{1}{3}}$. 60. $(2+x^5)^{-\frac{1}{7}}$.

61. $\left(2a^{\frac{1}{4}}-3x^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{4}{5}}$. **62.** $\left(ax^{\frac{1}{3}}+a^2y\right)^{-\frac{2}{5}}$. **63.** $\left(h^{\frac{1}{5}}+3z^4\right)^{\frac{4}{5}}$.

Appliquer la formule du binome à l'extraction des racines suivantes, en poussant l'opération jusqu'à la sixième décimale.

64. $\sqrt{10}$. **65.** $\sqrt{53}$. **66.** $\sqrt[3]{87}$. **67.** $\sqrt[3]{30}$. **68.** $\sqrt[4]{68}$.

69. $\sqrt[5]{259}$. **70.** $\sqrt[5]{1121}$. **71.** $\sqrt[7]{279900}$. **72.** $\sqrt{0,096}$.

73. $\sqrt[3]{0,87}$. **74.** $\sqrt{34\frac{1}{2}}$. **75.** $\sqrt{18\frac{3}{4}}$. **76.** $\sqrt[3]{58\frac{1}{3}}$. **77.** $\sqrt[3]{21\frac{2}{9}}$.

78. $\sqrt[3]{127\frac{5}{27}}$. **79.** $\sqrt[4]{1298\frac{5}{8}}$. **80.** $\sqrt[5]{33\frac{7}{9}}$. **81.** $\sqrt[3]{80^2}$.

82. $\sqrt[4]{624\frac{1}{2}}$. **83.** $\sqrt[7]{2189\frac{1}{3}}$. **84.** $\sqrt[8]{1,256}$. **85.** $\sqrt[9]{512,048}$.

86. $\sqrt[4]{13^3}$. **87.** $\sqrt[5]{33,7^2}$.

Développez les polynomes suivants :

88. $(a + bx + cx^2)^4$ selon les puissances croissantes de a.

89. $(a - \frac{1}{2}bx + \frac{1}{3}cx^2)^5$ selon les puissances décroissantes de a.

90. $(1 + 2ax + 3a^2x^2)^5$ selon les puissances croissantes de x.

91. $(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3)^7$. **92.** $(1 + a + 2a^2 + 3a^3)^5$.

93. $(a + b + b^2 + b^3)^{-3}$ selon les puissances croissantes de a.

94. $(1 + \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}x^2 + \frac{3}{4}x^3)^{-6}$. **95.** $(1 + y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3)^{-\frac{2}{3}}$.

96. $(1 - x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{4}{3}x^3)^{\frac{3}{4}}$. **97.** $(1 + \frac{2}{3}x - \frac{4}{5}x^2 + \frac{6}{7}x^3)^{\frac{5}{6}}$.

CHAPITRE XVI

DES DÉTERMINANTS

1. Des déterminants en général (¹).

Notation. Soient les deux équations

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned}\right\}; \text{ elles donnent : } \left\{\begin{aligned} x &= \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}. \\ y &= \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}. \end{aligned}\right.$$

Le dénominateur $a_1b_2 - a_2b_1$ est le *déterminant* des quatre quantités a_1 a_2 b_1 b_2 ; celles-ci en sont les *éléments*. Les numérateurs sont aussi les déterminants des quantités b_1 b_2 c_1 c_2 et a_1 a_2 c_1 c_2. On écrit les éléments dont se composent ces déterminants entre deux lignes verticales, ainsi qu'il suit:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Ces déterminants sont dits du *deuxième ordre*, parce que chacun des produits dont ils se composent est du second degré.

La résolution de trois équations linéaires à trois inconnues conduirait à des déterminants du 3e ordre, composés de 9 éléments; la résolution de n équations donnerait des déterminants du degré n, composés de n^2 éléments; on écrirait ces déterminants comme suit:

(¹) C'est Leibnitz qui, vers 1693, eut la première idée des déterminants, réinventés en 1750 par le mathématicien genevois Gabriel Cramer. C'est ce dernier surtout qui signala l'importance de ces fonctions. Il trouva la loi de formation des déterminants en résolvant les équations du premier degré à deux et à trois inconnues. Bezout, Laplace, Vandermonde, Lagrange firent connaître de nouvelles propriétés des déterminants; mais c'est entre les mains de Gauss, Cauchy, Jacobi, Cayley, Sylvester, Hesse, etc., que la nouvelle théorie s'est perfectionnée et qu'elle a reçu des applications importantes à la géométrie analytique, à la mécanique, à la théorie des nombres, etc. Jacobi, par son mémoire *De formatione et proprietatibus determinantium* (1841), premier traité spécial sur la matière, rendit plus facilement accessible l'étude des déterminants, dont la connaissance s'est bientôt répandue, grâce aux ouvrages de Spottiswoode, Salmon, Brioschi, Baltzer, etc., etc.

$$(\mathrm{I})\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad (\mathrm{II})\ [*]\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} \qquad (\mathrm{III})\ \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix}$$

$$(\mathrm{IV})\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \ldots\ldots & l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \ldots\ldots & l_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & \ldots\ldots & l_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ a_n & b_n & c_n & \ldots\ldots & l_n \end{vmatrix}$$

Les éléments d'une même rangée horizontale forment une *ligne*; ceux qui sont sur une même verticale, une *colonne*.

REMARQUE. Dans le déterminant (II), le premier indice de chaque élément marque le rang de la ligne et le second le rang de la colonne à laquelle appartient l'élément. Le plus souvent, du moins quand ils ne dépassent pas 9, ces indices sont écrits à la suite l'un de l'autre sans virgule $(a_{11}\ a_{12}\ a_{13})$. On les écrit aussi comme dans (III); l'indice inférieur marque la ligne; le supérieur, la colonne.

DÉFINITION. Etant données n^2 quantités (disposées par exemple en n lignes et n colonnes, comme dans (IV) ci-dessus), formons le produit $a_1\, b_2\, c_3\, \ldots\ldots\, l$ de n facteurs, en prenant un élément dans chaque ligne et chaque colonne, puis, sans changer l'ordre des lettres, faisons subir aux indices toutes les permutations possibles, et donnons le signe $+$ aux produits contenant un nombre pair de *dérangements* ou *inversions* (1), le signe — à ceux qui en renferment un nombre impair. La somme algébrique de tous les produits ainsi obtenus est le *déterminant* (2) des n^2 quantités.

REMARQUE. On voit que le déterminant de n^2 éléments est la somme algébrique de tous les produits qu'on pourrait former avec ces n^2 quantités prises n à n, et de manière que chaque produit contienne *un* élément de chaque ligne et *un* élément de chaque colonne.

(*) Cette notation est due à Leibnitz.

(1) Les *dérangements* ou *inversions* sont les dispositions dans lesquelles deux ou plusieurs indices ne sont pas dans leur ordre naturel. Ainsi 1, 3, 2 contient *une* inversion ; 3, 1, 2 en contient *deux*.

(2) Ou la *résultante*, d'après Laplace ; ou la *fonction alternée*, d'après Cauchy. La dénomination de *déterminant*, introduite par Gauss, a prévalu.

DÉVELOPPEMENT D'UN DÉTERMINANT. Développer un déterminant, c'est former les produits dont il vient d'être question.

Pour développer un déterminant du deuxième ordre, on multiplie les éléments qui sont sur les deux diagonales ; le produit selon la diagonale qui va du premier élément au dernier est positif, l'autre est négatif, et la somme algébrique des deux produits est le déterminant. Ex.:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1. \qquad \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 3.\,4 - 5.\,2 = 2.$$

Pour développer un déterminant de n^2 quantités (comme IV), on multiplie les éléments situés sur la diagonale allant du premier (a_1) au dernier (l_n) ; on obtient ainsi le produit

$$a_1\, b_2\, c_3\, d_4 \,\ldots.\, l_n,$$

qui est le *terme principal*. On fait ensuite dans ce terme toutes les permutations d'indices indiquées dans la définition (1).

La somme algébrique des produits s'indique souvent par les notations :

$\Sigma \pm a_1\, b_2\, c_3\, d_4 \ldots l_n$; $[a_1\, b_2\, c_3\, d_4 \ldots l_n]$; ou $(a_1\, b_2\, c_3\, d_4 \ldots l_n)$

Pour les déterminants de 9 éléments, comme (I), on peut procéder plus simplement ainsi qu'il suit :

RÈGLE DE SARRUS. *Sous la dernière ligne* (ou à côté de la troisième colonne), *on répète les deux premières lignes* (ou colonnes), ainsi :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$
$$\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{matrix}$$

on multiplie ensuite les éléments placés sur les lignes parallèles aux diagonales du tableau primitif. Les produits des éléments situés sur une parallèle à la diagonale du terme principal sont positifs ; les autres sont négatifs.

(1) Voir plus loin calcul des déterminants, pages 256 et 260.

LXXXIII

Développer les déterminants qui suivent, en appliquant la règle de Sarrus à ceux qui ont neuf éléments.

1. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$. **2.** $\begin{vmatrix} a & x \\ a' & x' \end{vmatrix}$. **3.** $\begin{vmatrix} -a_1 & -b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$. **4.** $\begin{vmatrix} 1 & a^2 \\ 1 & b^2 \end{vmatrix}$.

5. $\begin{vmatrix} a^2 & b^2 \\ -a & -b \end{vmatrix}$. **6.** $\begin{vmatrix} -1 & x^2 \\ -1 & x \end{vmatrix}$. **7.** $\begin{vmatrix} \sin a & \cos a \\ \sin b & \cos b \end{vmatrix}$.

8. $\begin{vmatrix} \dfrac{1}{\cos^2 a} & \sin^2 a \\ 1 & \cos^2 a \end{vmatrix}$. **9.** $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$. **10.** $\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$. **11.** $\begin{vmatrix} 2\frac{1}{2} & 4 \\ 3\frac{1}{4} & 6 \end{vmatrix}$.

12. $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$. **13.** $\begin{vmatrix} 12 & 5 \\ 11 & 7 \end{vmatrix}$. **14.** $\begin{vmatrix} 11 & 7 \\ 12 & 5 \end{vmatrix}$. **15.** $\begin{vmatrix} 14 & 6 \\ 9 & 5 \end{vmatrix}$.

16. $\begin{vmatrix} 9 & 5 \\ 14 & 6 \end{vmatrix}$. **17.** $\begin{vmatrix} 8 & 50 \\ 3 & 20 \end{vmatrix}$. **18.** $\begin{vmatrix} 3 & 20 \\ 8 & 50 \end{vmatrix}$. **19.** $\begin{vmatrix} 23 & 5 \\ 17 & 4 \end{vmatrix}$.

20. $\begin{vmatrix} 5 & 23 \\ 4 & 17 \end{vmatrix}$. **21.** $\begin{vmatrix} 13 & 7 \\ 10 & 8 \end{vmatrix}$. **22.** $\begin{vmatrix} 9 & 5 \\ 7 & 6 \end{vmatrix}$. **23.** $\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 5 & 9 \end{vmatrix}$.

24. $\begin{vmatrix} 3\frac{1}{2} & 6 \\ 2\frac{1}{3} & 8 \end{vmatrix}$. **25.** $\begin{vmatrix} 8 & 2\frac{1}{3} \\ 6 & 3\frac{1}{2} \end{vmatrix}$. **26.** $\begin{vmatrix} \frac{8}{4} & \frac{2}{3} \\ \frac{6}{5} & \frac{8}{3} \end{vmatrix}$. **27.** $\begin{vmatrix} 3\frac{1}{9} & 1\frac{1}{6} \\ 2\frac{1}{3} & 1\frac{1}{2} \end{vmatrix}$.

28. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$. **29.** $\begin{vmatrix} ma_1 & mb_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$. **30.** $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$. **31.** $\begin{vmatrix} px_1 & y_1 \\ px_2 & y_2 \end{vmatrix}$.

---

32. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$. **33** $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$. **34.** $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & a & b \\ c & d & 1 \end{vmatrix}$.

35 $\begin{vmatrix} -a & b & c \\ -m & n & 1 \\ -1 & c & a \end{vmatrix}$. **36.** $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ m & 1 & n \\ o & p & a \end{vmatrix}$. **37.** $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 4 & 1 & 6 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix}$.

38. $\begin{vmatrix} 2\frac{1}{2} & 4 & 1\frac{1}{8} \\ 4\frac{1}{5} & 3 & 9 \\ 5 & 15 & 2 \end{vmatrix}$. **39.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$. **40.** $\begin{vmatrix} 7 & 14 & 5 \\ \frac{1}{4} & 2 & 10 \\ \frac{1}{5} & 4 & 1\frac{2}{7} \end{vmatrix}$.

41. $\Sigma \pm a_{11}\, a_{22}\, a_{33}$. **42.** $\Sigma \pm a'\, b''\, c'''$.

43. $\Sigma \pm a_1^1\, a_2^2\, a_3^3$. **44.** $\Sigma \pm a_1\, b_2\, c_3$.

45. $\Sigma \pm a_1^i\, a_2^k\, a_3^l\, a_4^m$. **46.** $\Sigma \pm x_{1a}\, x_{2b}\, x_{3d}\, x_{4c}$.

47. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 4 & 1 & 5 \\ 6 & 8 & 9 \end{vmatrix}$. **48.** $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 7 \\ 6 & 8 & 9 \end{vmatrix}$. **49.** $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 6 & 8 & 9 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix}$. **50.** $\begin{vmatrix} 7 & 4 & 11 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 8 & 12 \end{vmatrix}$.

51. $\begin{vmatrix} 4 & 7 & 11 \\ 1 & 2 & 5 \\ 8 & 3 & 12 \end{vmatrix}$. **52.** $\begin{vmatrix} 4 & 11 & 7 \\ 1 & 5 & 2 \\ 8 & 12 & 3 \end{vmatrix}$. **53.** $\begin{vmatrix} 12 & 15 & 17 \\ 5 & 4 & 3 \\ 1 & 20 & 2 \end{vmatrix}$. **54.** $\begin{vmatrix} 12 & 5 & 1 \\ 15 & 4 & 20 \\ 17 & 3 & 2 \end{vmatrix}$.

LXXXIV

2. Transformation des déterminants.

I. *On peut changer les lignes en colonnes et les colonnes en lignes sans changer ni la valeur ni le signe du déterminant.*

II. *Un déterminant conserve sa valeur absolue, mais change de signe, si l'on change entre elles deux lignes ou deux colonnes. — Le déterminant ne change ni de valeur ni de signe si l'on fait à la fois deux changements de ce genre.*

Dans les déterminants qui suivent, changer les lignes en colonnes et *vice-versa*, et développer les huit premiers déterminants avant et après le changement.

1. $\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 9 & 12 \end{vmatrix}$. **2.** $\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$. **3.** $\begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$. **4.** $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} \frac{5}{4} & 4\frac{1}{5} \\ \frac{2}{3} & 3\frac{1}{5} \end{vmatrix}$. **6.** $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 9 & 7 & 8 \end{vmatrix}$. **7.** $\begin{vmatrix} 11 & 13 & 15 \\ 7 & 9 & 4 \\ 17 & 8 & 3 \end{vmatrix}$. **8.** $\begin{vmatrix} a & 2 & b \\ 3 & b & c \\ 4 & c & a \end{vmatrix}$.

9. $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & 8 & 7 & 1 \\ 9 & 5 & 4 & 11 \\ 13 & 6 & 3 & 10 \end{vmatrix}$. **10.** $\begin{vmatrix} 1 & 12 & 11 & 15 \\ 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & 9 \\ 3 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 8 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$. **11.** $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$.

Dans les exemples suivants, amener au premier rang (c'est-à-dire pour les lignes, en haut, pour les colonnes, à gauche) les rangées dont les éléments sont soulignés, et indiquer si l'opération amène un changement de signe. Ainsi :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ \underline{d} & \underline{e} & \underline{f} \\ g & h & i \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix}.$$

12. $\begin{vmatrix} a_1 & \underline{b_1} & c_1 \\ a_2 & \underline{b_2} & c_2 \\ a_3 & \underline{b_3} & c_3 \end{vmatrix}.$ **13.** $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \underline{a_{21}} & \underline{a_{22}} & \underline{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$ **14.** $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ 2 & 3 & 5 \\ \underline{x_2} & \underline{y_2} & \underline{z_2} \end{vmatrix}.$

15. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 8 \\ 4 & 5 & 2 \\ \underline{7} & \underline{6} & \underline{3} \end{vmatrix}.$ **16.** $\begin{vmatrix} 4 & 7 & \underline{9} \\ 5 & 8 & \underline{3} \\ 2 & 10 & \underline{7} \end{vmatrix}.$ **17.** $\begin{vmatrix} \cos a & \sin a & \underline{\cos b} \\ \cos b & \cos a & \underline{\sin a} \\ 1 & 2 & \underline{1} \end{vmatrix}.$

Amener, par des changements convenables de lignes et de colonnes, en tête du déterminant l'élément souligné, et indiquer le signe du déterminant modifié.

18. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ \underline{a_2} & b_2 \end{vmatrix}.$ **19.** $\begin{vmatrix} x^2 & y^2 \\ x & \underline{y} \end{vmatrix}.$ **20.** $\begin{vmatrix} 4 & \underline{3} \\ 2 & 1 \end{vmatrix}.$ **21.** $\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 9 & \underline{7} \end{vmatrix}.$

22. $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 4 & \underline{3} & 8 \\ 2 & 9 & 6 \end{vmatrix}.$ **23.** $\begin{vmatrix} 6 & 8 & 5 \\ 7 & 9 & 2 \\ 11 & \underline{3} & 1 \end{vmatrix}.$ **24.** $\begin{vmatrix} 15 & 10 & 8 \\ 9 & 12 & 13 \\ 7 & 5 & \underline{4} \end{vmatrix}.$

25. $\begin{vmatrix} 3 & 7 & \underline{1} \\ 4 & 2 & 9 \\ 6 & 5 & 8 \end{vmatrix}.$ **26.** $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 \\ \underline{7} & 8 & 9 \end{vmatrix}.$ **27.** $\begin{vmatrix} 15 & 2 & 4 \\ 1 & 12 & \underline{7} \\ 6 & 9 & 8 \end{vmatrix}.$

28. $\begin{vmatrix} a_1 & k_1 & m_1 \\ \underline{a_2} & k_2 & m_2 \\ a_3 & k_3 & m_3 \end{vmatrix}.$ **29.** $\begin{vmatrix} a & \underline{1} & b \\ b & 3 & c \\ c & 4 & d \end{vmatrix}.$

LXXXV

III. *Lorsqu'on multiplie tous les éléments d'une ligne ou d'une colonne par un même facteur, le déterminant tout entier est multiplié par ce facteur. De même, lorsqu'on divise une rangée, on divise le déterminant.*

Remarque I. On peut donc diviser toute une ligne ou une colonne par le même facteur, pourvu qu'on multiplie en dehors des barres par ce facteur.

Remarque II. Si l'on change tous les signes d'une colonne ou d'une ligne, on change le signe du déterminant, car cela revient à le multiplier par -1.

Dans les exemples suivants, faire disparaître les fractions et mettre en dehors des barres tous les facteurs qu'on pourra isoler.

1. $\begin{vmatrix} 3a^2 & 12b \\ 5a^2 & 15b^2 \end{vmatrix}$. **2.** $\begin{vmatrix} x^3 & x \\ y^2 & y^3 \end{vmatrix}$. **3.** $\begin{vmatrix} ab^2 & cx^3 \\ ab^3 & cx^2 \end{vmatrix}$. **4.** $\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 15 & 6 \end{vmatrix}$.

5. $\begin{vmatrix} 9 & 15 \\ 10 & 25 \end{vmatrix}$. **6.** $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 21 & 14 \end{vmatrix}$. **7.** $\begin{vmatrix} 3\frac{1}{2} & 2\frac{1}{4} \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$. **8.** $\begin{vmatrix} 5\frac{1}{2} & 7\frac{1}{3} \\ 4\frac{1}{5} & 2{,}1 \end{vmatrix}$.

9. $\begin{vmatrix} 2\frac{6}{7} & 2\frac{8}{21} \\ 5\frac{5}{6} & 4\frac{2}{3} \end{vmatrix}$. **10.** $\begin{vmatrix} 1\frac{1}{2} & 2\frac{3}{4} \\ 1\frac{2}{7} & 3\frac{8}{14} \end{vmatrix}$. **11.** $\begin{vmatrix} 15 & 12 & 3 \\ 18 & 27 & 9 \\ 21 & 14 & 7 \end{vmatrix}$.

12. $\begin{vmatrix} 35 & 56 & 63 \\ 75 & 84 & 18 \\ 60 & 64 & 54 \end{vmatrix}$. **13.** $\begin{vmatrix} 15 & 24 & 33 \\ 20 & 32 & 44 \\ 35 & 56 & 77 \end{vmatrix}$. **14.** $\begin{vmatrix} 396 & 7\frac{1}{3} & 55 \\ 756 & 2\frac{1}{3} & 35 \\ 288 & 2\frac{2}{3} & 160 \end{vmatrix}$.

15. $\begin{vmatrix} 4\frac{1}{2} & 3\frac{1}{3} & 5 \\ 8 & 3 & 6\frac{2}{3} \\ 2 & 1\frac{1}{9} & 10 \end{vmatrix}$.

Dans les exemples suivants, rendre le terme principal positif, et simplifier le déterminant, si c'est possible.

16. $\begin{vmatrix} 2a & 6b \\ 4a^2 & -9b^3 \end{vmatrix}$. **17.** $\begin{vmatrix} -5 & 12 \\ 15 & 18 \end{vmatrix}$.

18. $\begin{vmatrix} 5a & 2b & 3c \\ 10a_2 & -4b_2 & 15c_2 \\ 35d & 16e & 9k \end{vmatrix}$. **19.** $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 15 & -6 & -7 \\ 21 & 12 & 1 \end{vmatrix}$.

20. $\begin{vmatrix} -42 & 9 & -3 \\ -14 & -63 & 21 \\ 70 & 45 & -10 \end{vmatrix}$. **21.** $\begin{vmatrix} 1\frac{1}{2} & -1\frac{2}{3} & -1\frac{3}{4} \\ -1\frac{4}{5} & 1\frac{5}{6} & 1\frac{7}{8} \\ 1\frac{1}{5} & -1\frac{1}{3} & -1\frac{1}{2} \end{vmatrix}$.

22. $\begin{vmatrix} -\frac{3}{2}a & 15b & \frac{3}{4}c \\ 9a^2 & 2b^3 & -\frac{1}{5}c \\ -2z & -\frac{1}{3}y & \frac{5}{6} \end{vmatrix}$.

Modifier les déterminants suivants de manière à avoir l'unité dans toute une colonne ou une ligne, et isoler les facteurs communs, s'il y a lieu.

23. $\begin{vmatrix} yz & x & x^2 \\ xz & y & y^2 \\ xy & z & z^2 \end{vmatrix}$. **24.** $\begin{vmatrix} m & x & y \\ m^2 & x^2 & y^2 \\ mn & x^3 & y^3 \end{vmatrix}$. **25.** $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 4 & 1 & 7 \\ 16 & 6 & 15 \end{vmatrix}$.

26. $\begin{vmatrix} \frac{3}{35} & 2 & 4 \\ \frac{3}{28} & 7 & 1 \\ \frac{3}{20} & 3 & 6 \end{vmatrix}$. **27.** $\begin{vmatrix} bcd & a & a^2 & a^3 \\ acd & b & b^2 & b^3 \\ abd & c & c^2 & c^3 \\ abc & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}$. **28.** $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 1 & 12 & 2 \\ \frac{3}{4} & 5 & 9 & 1 \\ 7 & \frac{5}{6} & 2 & \frac{1}{3} \end{vmatrix}$.

29. $\begin{vmatrix} 2a & 3a^2 & 5a^3 & a^4 \\ b & 12b^2 & \frac{1}{2}b^3 & b^4 \\ c & c^2 & 5c^3 & 4c^4 \\ 4d & d^2 & d^3 & 3d^4 \end{vmatrix}$. **30.** $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a^3 & 2b & c^4 & 2 \\ a^4 & 5 & 0 & d^4 \\ 3 & b^3 & c^2 & d^2 \end{vmatrix}$. **31.** $\begin{vmatrix} 3 & x^5 & y^2 & a \\ b^2 & a^2 & 7 & z^3 \\ c^3 & 2 & z^2 & c^3 \\ x^2 & y^3 & b & 8 \end{vmatrix}$.

LXXXVI

IV. *Si, dans un déterminant, deux lignes ou deux colonnes sont identiques, le déterminant est égal à zéro.*

V. *Lorsque les éléments de deux rangées parallèles ne diffèrent que par un même facteur, le déterminant est égal à zéro.*

Chercher si, parmi les déterminants qui suivent, il y en a qui soient nuls.

1. $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$. **2.** $\begin{vmatrix} 13 & 7 \\ 39 & 21 \end{vmatrix}$. **3.** $\begin{vmatrix} a^2 & b^2 \\ a & b \end{vmatrix}$. **4.** $\begin{vmatrix} 1 & \cos^2 a \\ \text{séc}\, a & \cos a \end{vmatrix}$.

5. $\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 7 & 28 \end{vmatrix}$. **6.** $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & 9 \\ \sqrt{18} & 27 \end{vmatrix}$. **7.** $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ a & a^2 & a^3 \\ a^2 & a^3 & a^4 \end{vmatrix}$.

8. $\begin{vmatrix} 3 & a^m & 1 \\ 2 & a^{m+2} & a^2 \\ 7 & a^{m+4} & a^4 \end{vmatrix}$. **9.** $\begin{vmatrix} b & a^{n-1} & \frac{1}{a} \\ c & a^n & 1 \\ d & a^{n+1} & a \end{vmatrix}$. **10.** $\begin{vmatrix} 12 & 4 & 2 \\ 15 & 5 & 1 \\ 9 & 3 & 7 \end{vmatrix}$.

LXXXVII

VI. *Lorsque, dans une rangée, tous les éléments sont nuls, à l'exception d'un seul, le déterminant se réduit au produit de cet élément par le déterminant du degré immédiatement inférieur qu'on obtient en supprimant la ligne et la colonne dont fait partie l'élément en question.*

REMARQUE III. Quant au signe, si l'élément différent de zéro est dans la m^e ligne et la p^e colonne, le produit devra être multiplié par $(-1)^{m+p}$.

REMARQUE IV. Quand, des deux rangées dont fait partie un élément différent de zéro, l'une est complétée uniquement par des zéros, quels que soient les éléments de l'autre rangée, ils n'influent pas sur la valeur du déterminant.

VII. *Lorsque tous les éléments situés du même côté de la diagonale sont nuls, le déterminant se réduit à son terme principal.*

VIII. *Un déterminant peut toujours être mis sous la forme d'un autre déterminant d'un ordre plus élevé.*

Simplifier les déterminants suivants en faisant disparaître les zéros.

1. $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$. **2.** $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & 0 & z_2 \\ x_3 & 0 & z_3 \end{vmatrix}$. **3.** $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & 0 \end{vmatrix}$.

4. $\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ 0 & 0 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix}$. **5.** $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 0 \\ 8 & 6 & 7 \end{vmatrix}$. **6.** $\begin{vmatrix} 6 & 0 & 11 \\ 28 & 5 & 57 \\ 2 & 0 & 7 \end{vmatrix}$.

7. $\begin{vmatrix} 31 & 12 & 4 \\ 5 & 0 & 0 \\ 23 & 9 & 7 \end{vmatrix}$. 8. $\begin{vmatrix} 0 & 1\frac{1}{2} & 3 \\ 11 & 6 & 15 \\ 0 & 4\frac{1}{3} & 18 \end{vmatrix}$. 9. $\begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 \\ 0 & a^4 & b^4 \\ 1 & a^6 & b^6 \end{vmatrix}$.

10. $\begin{vmatrix} 20 & 3\frac{1}{9} & 8 \\ 18 & 14\frac{1}{7} & 14 \\ 0 & 4\frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix}$. 11. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{vmatrix}$. 12. $\begin{vmatrix} 2 & 6 & 8 & 7 \\ 5 & 4 & 11 & 13 \\ 9 & 3 & 17 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

13. $\begin{vmatrix} 7 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 0 & x_2 & 0 & z_2 \\ 0 & x_3 & 0 & 0 \\ 11 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}$. 14. $\begin{vmatrix} 14 & 0 & 0 & 0 \\ 13 & 7 & 9 & 8 \\ 17 & 5 & 6 & 4 \\ 3 & 11 & 0 & 0 \end{vmatrix}$. 15. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 17 \\ 11 & 6 & 9 & 8 & 43 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \\ 9 & 1 & 4 & 7 & 1\frac{1}{2} \\ 12 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$.

16. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ 0 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ 0 & b_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & b_4 & c_4 & 0 & 0 \\ 0 & b_5 & c_5 & d_5 & 0 \end{vmatrix}$. 17. $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 0 & 0 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & 0 \\ a_5 & b_5 & c_5 & d_5 & e_5 \end{vmatrix}$.

Elevez de deux degrés les exemples 18 à 23, et d'un degré tous les suivants.

18. $\begin{vmatrix} x^2 & y^2 \\ x^3 & y^3 \end{vmatrix}$. 19. $\begin{vmatrix} b^2 & x \\ c^2 & y \end{vmatrix}$. 20. $\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 12 \end{vmatrix}$. 21. $\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 15 & 20 \end{vmatrix}$.

22. $\begin{vmatrix} 5 & 11 \\ 13 & 7 \end{vmatrix}$. 23. $\begin{vmatrix} 2 & x \\ 5 & y \end{vmatrix}$. 24. $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 4 & 2 & 9 \\ 6 & 1 & 3 \end{vmatrix}$. 25. $\begin{vmatrix} 8 & 11 & 7 \\ 5 & 4 & 9 \\ 2 & 6 & 13 \end{vmatrix}$.

26 $\begin{vmatrix} x & 1 & 3 \\ y & 7 & 8 \\ z & 10 & 6 \end{vmatrix}$. 27. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$. 28. $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 4 & 0 & 1 \\ 2 & \frac{1}{3} & 3 & 7 \\ 3 & 5 & \frac{1}{4} & 3 \\ 1 & 6 & 2 & 6 \end{vmatrix}$.

$$14. \quad \begin{vmatrix} x_1 & 1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & 2 & z_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & 1 & z_1 \\ a & b & c \\ x_3 & 2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

$$15. \quad \begin{vmatrix} 2 & y_1 & z_1 \\ 7 & y_2 & z_2 \\ 5 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 8 & y_1 & z_1 \\ 3 & y_2 & z_2 \\ 5 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 10 & y_1 & z_1 \\ 10a & b & c \\ 10 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} -$$

$$\begin{vmatrix} -10 & y_1 & z_1 \\ -10a & y_2-b & z_2-c \\ 5 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

XC

3. Des déterminants mineurs.

DÉFINITION. Si, dans un déterminant donné R, on supprime une ligne et une colonne, les éléments qui restent forment un nouveau déterminant qu'on nomme un *déterminant mineur* ou *partiel* de R. — Ce mineur est du premier ordre.

Si l'on opère de même sur ce dernier, on obtient un déterminant mineur du deuxième ordre, et ainsi de suite.

On désigne ordinairement les mineurs de la manière suivante. Si l'on supprime les rangées dont fait partie l'élément

a_1, le mineur qui reste se désigne par A_1
b_2 » » » B_2
c_i » » » C_i

XII. *Un déterminant R de n^2 éléments* (comme IV, page 245) *est égal à la somme algébrique des produits qu'on obtient en multipliant chaque élément d'une rangée par le mineur correspondant.*

Ainsi, soit R le déterminant IV, page 245; on a;

$$R = a_1A_1 - a_2A_2 + a_3A_3 \ldots\ldots \pm a_nA_n.$$

REMARQUE V. Le signe de chaque produit se détermine comme suit: si l'élément qui multiplie le mineur est dans la m^e ligne et la p^e colonne, le produit doit être multiplié par $(-1)^{m+p}$.

REMARQUE VI. Une autre règle d'un emploi commode pour trouver le signe est la suivante. Partant du premier élément principal, on chemine d'élément en élément, dans n'importe quelle direction, mais sans jamais aller en diagonale, jusqu'à celui qui forme le coefficient du terme considéré. On commence par +, et on change de signe à chaque nouvel élément qu'on rencontre en chemin.

Dans les exemples qui suivent, développer les déterminants au moyen de leurs mineurs du premier ordre ordonnés selon les rangées soulignées.

1. $\begin{vmatrix} \underline{x_1} & a_1 & b_1 \\ \underline{x_2} & a_2 & b_2 \\ \underline{x_3} & a_3 & b_3 \end{vmatrix}$. **2.** $\begin{vmatrix} \underline{a} & \underline{b} & \underline{c} \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix}$. **3.** $\begin{vmatrix} x_1 & 2 & z_1 \\ \underline{3} & \underline{y_2} & \underline{z_2} \\ x_3 & 5 & z_3 \end{vmatrix}$.

4. $\begin{vmatrix} \underline{a} & x^3 & y^3 \\ \underline{0} & x^2 & ay \\ \underline{a^4} & ax & y^2 \end{vmatrix}$. **5.** $\begin{vmatrix} 2 & 7 & \underline{34} \\ 28 & 17 & \underline{5} \\ 9 & 13 & \underline{41} \end{vmatrix}$. **6.** $\begin{vmatrix} 18 & \underline{13} & 27 \\ 41 & \underline{12} & 20 \\ 54 & \underline{17} & 22 \end{vmatrix}$.

7. $\begin{vmatrix} a_1 & \underline{x_1} & b_1 & y_1 \\ a_2 & \underline{x_2} & b_2 & y_2 \\ a_3 & \underline{x_3} & b_3 & y_3 \\ a_4 & \underline{x_4} & b_4 & y_4 \end{vmatrix}$. **8.** $\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \underline{a_1^3} & a_1^4 \\ a_2^1 & a_2^2 & \underline{a_2^3} & a_2^4 \\ a_3^1 & a_3^2 & \underline{a_3^3} & a_3^4 \\ a_4^1 & a_4^2 & \underline{a_4^3} & a_4^4 \end{vmatrix}$.

9. $\begin{vmatrix} 11 & 13 & 2 & \underline{7} \\ 9 & 18 & 23 & \underline{15} \\ 27 & 37 & 11 & \underline{19} \\ 8 & 6 & 12 & \underline{31} \end{vmatrix}$.

Dans les exemples suivants, poursuivre le développement jusqu'à ce que les mineurs ne renferment plus que quatre éléments. On ordonnera chaque fois d'après les éléments de la rangée occupant le rang de celle qui est soulignée.

10. $\begin{vmatrix} a_1 & \underline{b_1} & y_1 & z_1 \\ a_2 & \underline{b_2} & y_2 & z_2 \\ a_3 & \underline{b_3} & y_3 & z_3 \\ a_4 & \underline{b_4} & y_4 & z_4 \end{vmatrix}$. **11.** $\begin{vmatrix} \alpha & a & x_1 & y_1 \\ \beta & b & x_2 & y_2 \\ \gamma & c & x_3 & y_3 \\ \underline{\delta} & \underline{d} & \underline{x_4} & \underline{y_4} \end{vmatrix}$. **12.** $\begin{vmatrix} \underline{8} & 15 & 2 & 9 \\ \underline{16} & 13 & 11 & 20 \\ \underline{14} & 18 & 23 & 31 \\ \underline{19} & 7 & 43 & 40 \end{vmatrix}$.

13. $$\begin{vmatrix} 3a & 2b & -c & -d & -5c \\ 4b & 5a & 2d & 6 & 10d \\ 8c & 4b & 3c & 2a & 15c \\ -11 & 6c & 4a & 7b & 20a \\ 5d & -11 & b & 2c & 4b \end{vmatrix}.$$

14. $$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 12 & 15 & 8 \\ 16 & 9 & 14 & 13 & 23 \\ 17 & 11 & 17 & 12 & 7 \\ 2 & 10 & 27 & 31 & 5 \\ 4 & 3 & 18 & 20 & 41 \end{vmatrix}.$$

15. $$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & u_1 & v_1 & w_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & u_2 & v_2 & w_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & u_3 & v_3 & w_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 & u_4 & v_4 & w_4 \\ x_5 & y_5 & z_5 & u_5 & v_5 & w_5 \\ x_6 & y_6 & z_6 & u_6 & v_6 & w_6 \end{vmatrix}.$$

XCI

4. Multiplication des déterminants.

XIII. *Le produit de deux déterminants de même ordre peut se mettre sous la forme d'un déterminant de cet ordre. — Pour effectuer la multiplication, on multiplie terme à terme la première ligne du multiplicande par la première ligne du multiplicateur : la somme des produits forme le premier élément du résultat ; puis la première ligne du multiplicande par la seconde ligne du multiplicateur, ce qui donne le second élément, etc. On opère de même avec la seconde, la troisième, etc. lignes du multiplicande.* Ex. :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \\ m_3 & n_3 & p_3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_1m_1 + b_1n_1 + c_1p_1, & a_1m_2 + b_1n_2 + c_1p_2, & a_1m_3 + b_1n_3 + c_1p_3 \\ a_2m_1 + b_2n_1 + c_2p_1, & a_2m_2 + b_2n_2 + c_2p_2, & a_2m_3 + b_2n_3 + c_2p_3 \\ a_3m_1 + b_3n_1 + c_3p_1, & a_3m_2 + b_3n_2 + c_3p_2, & a_3m_3 + b_3n_3 + c_3p_3 \end{vmatrix}$$

REMARQUE VII. La multiplication peut s'opérer de quatre manières différentes : en multipliant les lignes du multiplicande par les lignes ou les colonnes du multiplicateur, ou les colonnes du multiplicande par les colonnes ou les lignes du multiplicateur.

Multiplier les déterminants qui suivent.

1. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$. **2.** $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}$. **3.** $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 13 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x & y \\ z & u \end{vmatrix}$.

4. $\begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 5 & 13 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}$ **5.** $\begin{vmatrix} 20 & 17 \\ 13 & 8 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 12 & 13 \end{vmatrix}$.

6. $\begin{vmatrix} \sin^2 a & \cos a \\ \sin^2 b & \cos^2 b \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & \dfrac{1}{\cos a} \\ \dfrac{1}{\sin b} & -1 \end{vmatrix}$.

7. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -7 \\ 4 & 9 & 5 \\ 8 & 6 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 10 & 11 & 4 \\ 3 & 13 & -15 \\ 16 & -20 & 31 \end{vmatrix}$.

8. $\begin{vmatrix} 7 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 8 \\ 9 & 4 & 6 & 10 \\ 15 & 3 & 11 & 7 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 6 \\ 4 & 3 & 9 & 7 \\ 5 & 4 & 10 & 8 \\ 6 & 7 & 11 & 13 \end{vmatrix}$. **9.** $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 6 & 8 & 3 \\ 5 & 9 & 11 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 12 & 23 \\ 17 & 6 \end{vmatrix}$.

10. $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 9 & 1 \\ 4 & 7 & 13 & 6 \\ 3 & 8 & 5 & 10 \\ 2 & 11 & 21 & 7 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 11 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 7 \\ 5 & \frac{1}{3} & 10 \end{vmatrix}$.

Décomposer les déterminants qui suivent en un produit de deux déterminants.

11. $\begin{vmatrix} mx_1 + ny_1\,, & mx_2 + ny_2 \\ px_1 + qy_1\,, & px_2 + qy_2 \end{vmatrix}$.

12. $\begin{vmatrix} a_1u_1 + b_1u_2 , & a_1v_1 + b_1v_2 \\ a_2u_1 + b_2u_2 , & a_2v_1 + b_2v_2 \end{vmatrix}$.

13. $\begin{vmatrix} 7a_1 + 3a_2 , & 7x_1 + 3x_2 \\ 9a_1 + 5x_2 , & 9x_1 + 5x_2 \end{vmatrix}$.

XCII

5. Calcul des déterminants.

Pour calculer un déterminant, on tâche d'amener dans une rangée autant de zéros que possible (théor. IX) pour abaisser le degré du déterminant (théor. VI), ou on décompose ce dernier en ses mineurs (théor. XII).

Calculer les déterminants suivants.

1. $\begin{vmatrix} 13 & 7 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$. 2. $\begin{vmatrix} 11 & 8 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}$. 3. $\begin{vmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}$. 4. $\begin{vmatrix} 17 & 4\frac{7}{9} \\ 8 & 3\frac{3}{4} \end{vmatrix}$.

5. $\begin{vmatrix} 23 & 7 \\ 11\frac{2}{9} & 8\frac{5}{6} \end{vmatrix}$. 6. $\begin{vmatrix} 7\frac{1}{2} & 8\frac{1}{3} \\ 5\frac{1}{4} & 11\frac{2}{5} \end{vmatrix}$. 7. $\begin{vmatrix} 14\frac{2}{5} & 43\frac{1}{5} \\ 7\frac{1}{12} & 11\frac{1}{4} \end{vmatrix}$. 8. $\begin{vmatrix} \frac{2}{3}a & \frac{3}{5}b \\ \frac{1}{4}x & \frac{4}{7}y \end{vmatrix}$.

9. $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$. 10. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix}$. 11. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & -1 & 2 \\ 9 & 4 & -3 \end{vmatrix}$.

12. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x^2 \\ 1 & x^2 & 0 \end{vmatrix}$ (1). 13. $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & -3 \\ 4 & 7 & -1 \end{vmatrix}$. 14. $\begin{vmatrix} a_1^m & a_1^n & a_1^p \\ a_2^m & a_2^n & a_2^p \\ a_3^m & a_3^n & a_3^p \end{vmatrix}$.

15. Du paragraphe LXXXVII, calculez les numéros 1 à 14.

16. Du paragraphe LXXXV, calculez les numéros 11, 12, 13, 14, 15, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31.

(1) Les éléments qui occupent la p^e place de la m^e colonne et la p^e place de la m^e ligne sont dits *conjugués ;* tels sont dans l'exemple 17 ci-après 13 et 5, 17 et 21, 11 et 4, 8 et 12
Un déterminant est dit *symétrique*, quand les éléments conjugués sont égaux, comme dans les exemples 12, 18, 20, 21 de ce paragraphe.

17. $\begin{vmatrix} 9 & 13 & 17 & 4 \\ 5 & 6 & 11 & 20 \\ 21 & 4 & -1 & 8 \\ 16 & -3 & 12 & 19 \end{vmatrix}$. **18.** $\begin{vmatrix} 5 & -10 & 11 & 0 \\ -10 & -11 & 12 & 4 \\ 11 & 12 & -11 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & -6 \end{vmatrix}$.

19. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sin\alpha & \sin\beta & \sin\gamma \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \end{vmatrix}$. **20.** $\begin{vmatrix} 0 & y^2 & 1 \\ y^2 & 0 & x^2 \\ 1 & x^2 & 0 \end{vmatrix}$.

21. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & 0 & x^2 \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix}$. **22.** $\begin{vmatrix} 5 & 13 & 6 & 1 \\ 4 & 156 & \frac{1}{2} & 12 \\ 64 & 61 & 9\frac{1}{3} & 7 \\ 20 & 117 & 3 & 9 \end{vmatrix}$.

23. Du paragraphe LXXXVII, calculez les numéros 15, 16, 17.

24. Du paragraphe LXXXVIII, calculez les numéros 9 à 14.

25. Du paragraphe XC, calculez les numéros 10 à 14.

26. $\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$.

27. $\begin{vmatrix} 2u^2+x & z+y & -z & u^2 \\ u+x^2 & 2z^3+a^2 & -z^3 & \frac{1}{2}u \\ 6z+x^4 & u^5-y^4 & u^5 & 3z \\ 3-x^3 & 1-u^2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

28. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix}$. **29.** $\begin{vmatrix} a_0 & 2a_1 & a & 0 \\ 0 & a_0 & 2a_1 & a_2 \\ a_1 & 2a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_1 & 2a_2 & a_3 \end{vmatrix}$.

30. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a & b \\ 1 & a & 0 & c \\ 1 & b & c & 0 \end{vmatrix}$. **31.** $\begin{vmatrix} (a+b)^2 & c^2 & c^2 \\ a^2 & (b+c)^2 & a^2 \\ b^2 & b^2 & (c+a)^2 \end{vmatrix}$.

32. $\begin{vmatrix} \beta & a & b & c \\ a & \beta & 0 & 0 \\ b & 0 & \beta & 0 \\ c & 0 & 0 & \beta \end{vmatrix}$. **33.** $\begin{vmatrix} a_0 & 2a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & 2a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & 2a_1 & a_2 \\ b_0 & 3b_1 & 3b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & b_0 & 3b_1 & 3b_2 & b_3 \end{vmatrix}$

34. $\begin{vmatrix} 1 & n & \frac{(n+3)n}{2} \\ 1 & n+1 & \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\ 1 & n+2 & \frac{(n+2)(n+3)}{2} \end{vmatrix}$.

35. $\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & 0 & 0 \\ \cos\alpha & 1 & \cos\beta & \cos\gamma \\ 0 & \cos\beta & 1 & \cos\delta \\ 0 & \cos\gamma & \cos\delta & 1 \end{vmatrix}$.

XCIII

6. Application des déterminants.

Parmi les questions auxquelles on peut appliquer les déterminants se trouve la résolution des équations du premier degré à plusieurs inconnues.

XIV. *Chaque inconnue est égale à une fraction dont le dénominateur est formé par le déterminant du système des coefficients des inconnues, et le numérateur par ce même déterminant dans lequel les coefficients de l'inconnue cherchée sont remplacés par les quantités toutes connues, préalablement portées dans le second membre.*

Ainsi supposons qu'on ait à résoudre les équations :

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 5z &= 17 \\ 3x - 4y + 2z &= 3 \\ -6x + 7y + 9z &= 5. \end{aligned}$$

On aura :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 17 & 3 & 5 \\ 3 & -4 & 2 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & -4 & 2 \\ -6 & 7 & 9 \end{vmatrix}} = 3. \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 17 & 5 \\ 3 & 3 & 2 \\ -6 & 5 & 9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & -4 & 2 \\ -6 & 7 & 9 \end{vmatrix}} = 2.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 17 \\ 3 & -4 & 3 \\ -6 & 7 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & -4 & 2 \\ -6 & 7 & 9 \end{vmatrix}} = 1.$$

Appliquez les déterminants à la résolution des équations suivantes :

1. $3x + 4y = 40$, $5x + y = 27.$ **2.** $15x + 2y = 36$, $4x + 13y = 47.$ **3.** $4x + 3y = 4$, $14x - 6y = 3.$

4. $7x + 6y = 129$, $9x + 2y = 103.$ **5.** $4x - 5y = -25$, $7x - 4y = 18.$ **6.** $3y - 2x = 25$, $15x - 2y = -3.$

7. $4\frac{2}{5}x - 3\frac{1}{7}y = 0$, $3x + 2\frac{1}{2}y = 32\frac{1}{2}.$ **8.** $3\frac{1}{4}x + 2\frac{3}{7}y = 107$, $5\frac{1}{2}y - 7\frac{1}{3}x = 66.$

9. $3x + 2y + 4z = 33$
$5x + y + 9z = 48$
$7x + 4y + 5z = 70.$

10. $2x + 3y + 4z = 45$
$5x - 2y + 3z = 35$
$9x + 4y - 5z = 13.$

11. $3x + 2y - z = 10$
$2x - 5y + 7z = 21$
$3y - 8x + 5\frac{1}{2}z = 32.$

12. $3y + 11z - 7 = 13x$
$10\frac{5}{7}z - 6x + 5 = y$
$x + 2y - 43 = z.$

13. $4x + 21y + 8 = 24z$
$28y + 3\frac{3}{4}z + 8 = -22x$
$17x - 15z - 8 = -34\frac{3}{4}y.$

14. $2\frac{3}{4}x + 5\frac{4}{7}y = 20\frac{2}{21}z$
$4\frac{1}{5}x - 2\frac{7}{8}y = 7$
$2\frac{1}{2}y - 1\frac{2}{3}z = 2\frac{5}{8}x.$

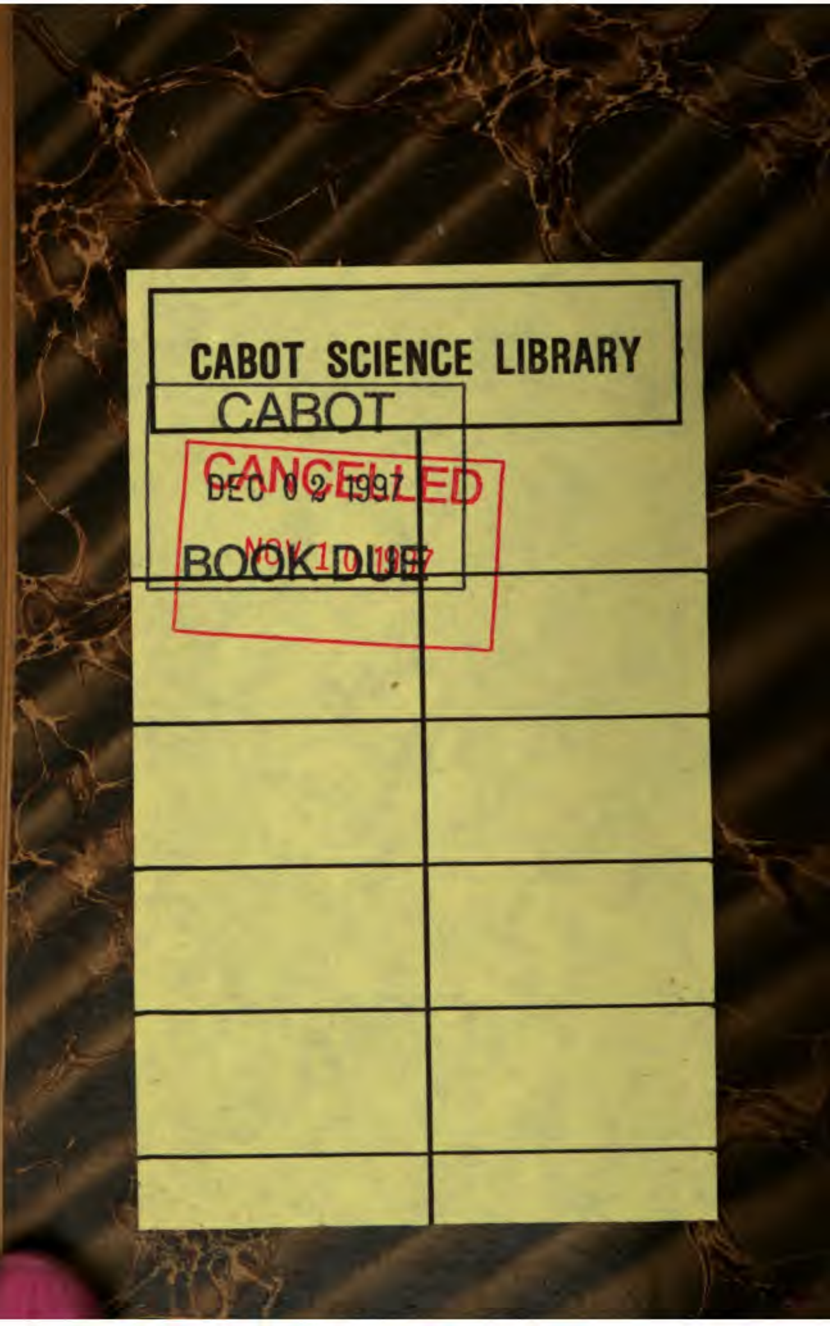
15. $x + ay + a^2z + a^3u + a^4 = 0$
$x + by + b^2z + b^3u + b^4 = 0$
$x + cy + c^2z + c^3u + c^4 = 0$
$x + dy + d^2z + d^3u + d^4 = 0.$

16. $2x - y - z + 2u - v = 3a$
$2y - z - u + 2v - x = 3b$
$2z - u - v + 2x - y = 3c$
$2u - v - x + 2y - z = 3d$
$2v - x - y + 2z - u = 3e.$

On trouvera aux paragraphes XLV et XLVI de la première série d'autres exemples auxquels on pourra appliquer les déterminants.

Dans la trigométrie, la géométrie analytique et d'autres branches des mathématiques, l'élève rencontrera de nombreuses et importantes applications des déterminants.

FIN.



CABOT SCIENCE LIBRARY
CABOT
CANCELLED
DEC 0 2 1997
BOOK DUE